This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06630753 3

OEA
FRANCE.
Ecole

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1874, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier-Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER.
Quai des Augustins, 55.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME TROISIÈME — ANNÉE 1874.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55

1874

(Tous droits réservés.)

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

COMITÉ DE RÉDACTION

COMPOSÉ DES MAÎTRES DES CONFÉRENCES SCIENTIFIQUES.

Sciences mathématiques.

MM.

Bertrand, de l'Institut.
Bonnet, de l'Institut.
Bouquet, Professeur à la Sorbonne.
Briot, Professeur à la Sorbonne.
Hermite, de l'Institut.
Puiseux, de l'Institut.

Sciences physiques.

MM.

Balard, de l'Institut.
Bertin, Sous-Direct. de l'École Normale.
Darboux.
Friedel, de l'École des Mines.
Sainte-Claire Deville (Henri), de l'Institut.
Troost, Suppl. à la Sorbonne.

Sciences naturelles.

MM.

Delafosse, de l'Institut.
Delesse, Ingénieur en chef des Mines.
Des Cloizeaux, de l'Institut.
De Lacaze-Duthiers, de l'Institut.
Pasteur, de l'Institut.
Van Tieghem.

ADMINISTRATION.

MM. H. Sainte-Claire Deville .... *Directeur.*
Bourget, Directeur des Études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. *Secrétaire.*
Gernez, Professeur au Lycée Descartes .... *Secrétaire-Adjoint.*

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DE LA RÉFRACTION A TRAVERS UN PRISME SUIVANT UNE LOI QUELCONQUE,

PAR M. A. CORNU,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME PARTIE (1).

ÉTUDES EXPÉRIMENTALES DESTINÉES A CONTRÔLER LES THÉORÈMES PRÉCÉDEMMENT ÉTABLIS.

38. Dans les deux premières Parties du présent Mémoire, un certain nombre de théorèmes géométriques assez simples, relatifs à la marche des rayons lumineux à travers un prisme, ont été établis indépendamment de toute connaissance sur la surface d'onde dans le milieu considéré. Dans ce qui va suivre, on va voir l'application de ces théorèmes à l'étude de la marche de la lumière à travers des prismes formés de diverses substances cristallisées qui se prêtent utilement à ce genre d'observations : les déterminations numériques qui s'y rencontrent justifient de tout point l'exactitude de ces propositions; en outre, elles

(1) *Voir* 2e Série, t. I, p. 231.

apportent un certain nombre de vérifications très-précises relatives à la surface d'onde des milieux à un axe optique, découverte ou plutôt devinée par Huyghens.

39. Les expériences ont été faites, pour la plupart, avec des prismes de spath d'Islande, substance qui se recommande spécialement, pour ce genre d'études, par son homogénéité, sa transparence, la perfection géométrique de ses clivages et l'énergie de sa double réfraction; le seul reproche qu'on puisse adresser à ce cristal est son peu de dureté, qui rend très-difficile la taille de faces artificielles aussi planes que la précision des mesures l'exigerait. Toutes ces conditions sont nécessaires pour que les vérifications numériques aient une valeur effective. En général, les substances que la nature nous offre en beaux cristaux transparents, le spath d'Islande excepté, ont toujours quelque défaut grave qui les fait rejeter; par exemple, le quartz, la topaze, l'orthose, la baryte sulfatée sont trop peu biréfringentes pour qu'on puisse les employer utilement à de semblables observations. L'aragonite serait très-intéressante à étudier, à cause de sa biréfringence avec deux axes optiques; mais elle a deux défauts : le premier, de ne présenter aucun repère cristallographique précis pour l'orientation des sections, car les facettes planes et polies sont rares et les clivages peu marqués; le second, de différer trop peu d'un cristal à un seul axe optique; son emploi introduirait toutes les complications des cristaux à deux axes, sans apporter le bénéfice des contrôles théoriques relatifs à cette complexité de constitution. Parmi les cristaux artificiels, l'azotate de soude se recommande par une biréfringence énorme et une facilité de clivage rhomboédrique remarquable; mais il est encore plus mou que le spath d'Islande et de plus un peu déliquescent, de sorte que la taille de faces artificielles suffisamment planes est à peu près impossible; on peut néanmoins utiliser, comme on le verra plus loin, la réfraction du rayon extraordinaire à travers l'angle aigu de deux clivages, et en déduire une vérification intéressante. Le soufre cristallisé dans le sulfure de carbone devra aussi donner des résultats importants, car il est biaxe; mais la taille en est également très-difficile; aussi son étude a-t-elle dû être remise à une époque où l'on disposerait d'échantillons de transparence suffisante et convenablement taillés.

40. Le spath d'Islande offre encore un avantage : c'est la constance de ses propriétés optiques; tous les échantillons limpides et à clivages bien réguliers présentent la double réfraction à un seul axe optique avec des indices de réfraction principaux si bien définis, que les déterminations faites par un grand nombre de physiciens sont presque identiques.

Cette *homogénéité optique* est précieuse dans les études présentes, non-seulement parce qu'elle est une condition nécessaire à l'application des principes adoptés, mais parce qu'elle permet un système de vérifications sur lesquelles on ne pourrait pas compter si la substance réfringente présentait une structure optiquement irrégulière. En effet, il ne s'agit pas seulement d'appliquer aux données numériques de l'observation des formules qui permettent d'affirmer que, dans l'intérieur du milieu, les ondes lumineuses se comportent de telle ou telle manière : il faut montrer qu'il en est réellement ainsi; il est donc nécessaire de se ménager un moyen de connaître la marche de ces ondes par une méthode tout à fait indépendante. C'est justement ce que permet la connaissance de la surface de l'onde lumineuse dans les cristaux à un axe optique. Ces études ont donc le double avantage de vérifier les propositions géométriques très-générales relatives à la propagation des ondes, et en même temps de contrôler l'exactitude de la surface d'onde des uniaxes.

41. Ces considérations font comprendre la marche suivie, dans cette troisième Partie, pour l'exposé des observations et des calculs qui en dérivent. Chaque série de mesures donne lieu à deux séries de calculs : la première est l'application des théorèmes généraux exposés précédemment, indépendants de la connaissance de la surface d'onde lumineuse; la seconde est, au contraire, la détermination théorique des mêmes éléments, en partant de l'ellipsoïde d'Huyghens défini par les indices mesurés par Rudberg.

Les vérifications numériques constitueront donc un contrôle de l'exactitude, non-seulement des formules nouvelles, mais encore de l'ellipsoïde d'Huyghens.

PREMIÈRE SÉRIE D'OBSERVATIONS.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE ONDE RÉFRACTÉE PAR UN PRISME CORRESPONDANT AU MINIMUM DE DÉVIATION.

42. *Choix du prisme.* — Pour la série d'expériences faites en vue de vérifier les théorèmes dans leur généralité, on a choisi un prisme de spath d'Islande à faces artificielles; l'orientation a été déterminée par les trois conditions suivantes :

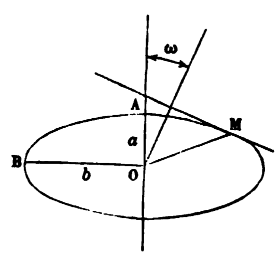
1° L'onde réfractée intérieure correspondant au minimum de déviation devra, comme onde suivant la loi *extraordinaire*, différer, autant qu'il sera possible, d'une onde suivant la loi ordinaire et avoir le moins possible d'éléments de symétrie communs avec les faces du prisme, afin d'accentuer la divergence entre les phénomènes que produisent ces deux espèces d'ondes.

2° L'orientation cristallographique de l'onde devra être facile à définir (¹).

(¹) On a profité de la connaissance de la surface de l'onde extraordinaire du spath d'Islande pour satisfaire à ces conditions. En effet, les ondes qui diffèrent le plus d'une onde suivant la loi ordinaire sont celles pour lesquelles la direction lumineuse efficace fait l'angle le plus grand avec la normale à l'onde. L'axe du rhomboèdre ou axe optique étant un axe de révolution, il suffit de rechercher, dans une section méridienne quelconque de l'ellipsoïde, la tangente à l'ellipse qui fait le plus grand angle avec le rayon vecteur du point de contact.

Soient (*fig.* 10) a le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde; b l'axe équatorial; ω l'angle

Fig. 10.



que fait la perpendiculaire à la tangente avec l'axe optique.

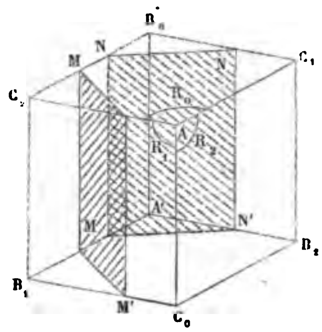
L'équation de la tangente à l'ellipse sera

$$x\cos\omega + y\sin\omega = p = \sqrt{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega};$$

3° Les faces seront inclinées à 60 degrés, cet angle étant commode pour la mesure de la déviation et des incidences.

Voici la figure représentant la coupe du prisme adopté, taillé dans un rhomboïde de spath d'Islande (*fig.* 11).

Fig. 11.



$AB_0C_1B_2C_0B_1C_2A'$ est le parallélépipède de clivage choisi; les faces artificielles MM' et NN' font respectivement des angles de 30 degrés avec

---

sa dérivée par rapport à ω donne l'équation d'une droite passant par le point de contact M

$$-x\sin\omega + y\cos\omega = -\frac{(a^2-b^2)\sin\omega\cos\omega}{p};$$

les valeurs de x et y, communes à ces deux équations, sont les coordonnées du point M. Posant

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{y}{x},$$

et divisant membre à membre les deux équations, il vient

$$\frac{+x\sin\omega - y\cos\omega}{x\cos\omega + y\sin\omega} = \frac{(a^2-b^2)\sin\omega\cos\omega}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega}$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}\omega'}{1+\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\omega'} = \operatorname{tang}(\omega-\omega') = \frac{(a^2-b^2)\operatorname{tang}\omega}{a^2+b^2\operatorname{tang}^2\omega};$$

on en déduirait aussi

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\omega.$$

Le maximum de $\omega-\omega'$ s'obtiendra en égalant à zéro la dernière expression de $\operatorname{tang}(\omega-\omega'$ prise par rapport à $\operatorname{tang}\omega$

$$(a^2+b^2\operatorname{tang}^2\omega)(a^2-b^2) - (a^2-b^2)\operatorname{tang}\omega\, 2b^2\operatorname{tang}\omega = 0,\quad b^2\operatorname{tang}^2\omega = a^2,$$

les faces $AC_2B_1C_0$, $A'B_0C_1B_2$, et sont toutes deux parallèles à l'arête AC_0 ou B_1C_2 ou B_0A'.

De cette manière l'axe du rhomboèdre est orienté d'une manière quelconque par rapport au prisme, de sorte qu'il n'y a aucun élément de symétrie commun entre le prisme et le cristal.

Pour éviter des confusions, on a donné un nom à chaque face du cristal.

Les trois faces rhomboédriques adjacentes au sommet obtus A sont R_0, R_1, R_2; les trois autres, qui leur sont respectivement parallèles, sont R'_0, R'_1, R'_2.

Les faces artificielles sont désignées par M et N.

---

d'où

$$\operatorname{tang}^2\omega = \frac{a^2}{b^2},\quad \operatorname{tang}\omega = \pm\frac{a}{b},\quad \operatorname{tang}\omega' = \pm\frac{b}{a}.$$

La valeur correspondante de $\omega - \omega'$

$$\operatorname{tang}(\omega - \omega') = \frac{(a^2 - b^2)\frac{a}{b}}{a^2 + a^2} = \frac{a^2 - b^2}{2ab}.$$

Rappelant que les indices de réfraction sont les inverses des demi-axes

$$\operatorname{tang}(\omega - \omega') = \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_e n_o},\qquad \begin{array}{ll} n_e \ldots\ldots\ldots & \text{indice extraordinaire,} \\ n_o \ldots\ldots\ldots & \text{indice ordinaire,} \end{array}$$

on voit ainsi que les ondes qui satisfont à la question correspondent aux deux diamètres conjugués égaux de l'ellipse méridienne. Substituant les valeurs de n_e, n_o de Rudberg correspondant à la raie D (*voir* plus loin, p. 29), il vient

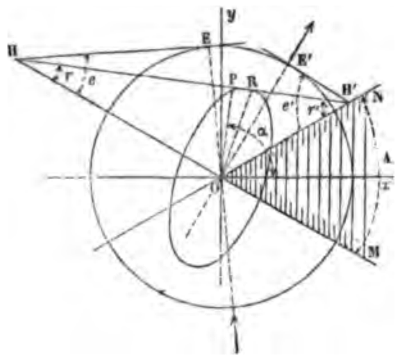
$$\left.\begin{array}{l} \omega = 41°52'\ 3'' \\ \omega' = 48°\ 7'57'' \end{array}\right\}\ \omega' - \omega = 6°15'54''.$$

Ce calcul préliminaire montre que, dans le spath d'Islande, la normale à l'onde extraordinaire fait, avec la direction lumineuse efficace, un angle qui atteint presque 6°16', et, comme cet angle est un maximum, les ondes voisines ne s'écarteront donc pas beaucoup de ces conditions. Quant à la direction de ces ondes, leur normale fait un angle d'environ 42 degrés avec l'axe optique.

Pratiquement voici comment, en partant de ces données, on a construit le prisme : on a remarqué que les faces de clivage du rhomboèdre de spath faisaient avec son axe un angle de 44°37', très-voisin de la direction des ondes qu'on vient de définir ; il en résulte qu'une onde qui se propagerait dans le cristal parallèlement à une face du rhomboèdre jouirait sensiblement de la propriété en question. On a donc pris pour plan bissecteur du prisme un plan de clivage ; on était ainsi assuré que l'onde réfractée serait très-voisine de la direction voulue. Quant à l'arête du prisme, elle a été choisie parallèle à une des arêtes du rhomboèdre formant l'hexagone gauche autour de l'axe.

D'après les conventions établies dans le premier Mémoire (p. 237), l'angle d'incidence sur la face M sera désigné par e, sur la face N par e'. La bissectrice intérieure de la section droite du prisme sera l'axe des x,..., comme il est indiqué (*fig.* 12).

Fig. 12.



Observations faites avec le prisme de spath d'Islande.

43. Ce prisme était placé sur la plate-forme d'un excellent goniomètre de Babinet, construit par MM. Brunner frères; il a servi à faire quatre séries d'observations; on déterminait

1° L'angle du prisme;

2° Les déviations minimum du rayon extraordinaire;

3° Les incidences correspondant à ce minimum, incidences qui ne sont pas égales, comme on l'a démontré précédemment, n° 24 (p. 252);

4° L'inclinaison de l'image de la fente verticale du collimateur après réfraction.

Dans toutes ces observations, on employait la lumière monochromatique très-intense, produite par la flamme d'un brûleur à gaz (ou d'un jet d'hydrogène pur) dans laquelle sont placés une spirale de platine et du sel marin fondu. Les deux premières déterminations s'effectuaient suivant la méthode ordinaire; on observait la réflexion des rayons du collimateur sur les deux faces du prisme fixé invariablement: la différence des lectures donnait le double de l'angle du prisme; de

même, la réfraction à droite, puis à gauche, fournissait le double de la déviation minimum.

La détermination de l'incidence, correspondant au minimum de déviation, est un peu moins facile à faire : la première méthode consiste à amener avec beaucoup de soin le prisme au minimum de déviation et à lire l'azimut du rayon réfracté et celui du rayon réfléchi sur la face d'incidence; l'incertitude que comporte nécessairement la position du prisme oblige à répéter l'observation un assez grand nombre de fois : la différence des lectures donne évidemment (*fig.* 13) un angle définitif H.

$$H = \pi - 2e + D.$$

Fig. 13.

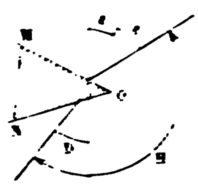
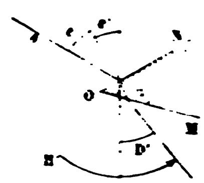


Fig. 14.



En recommençant la même série d'opérations sur l'autre face, on obtient un autre angle H' (*fig.* 14).

$$H' = \pi - 2e' + D.$$

Ces deux déterminations se contrôlent mutuellement et permettent, jusqu'à un certain point, d'assigner l'approximation du résultat final, qui est la valeur $e - e'$.

En effet, on a dans tous les cas

$$A + D = e + e';$$

substituant la valeur de D dans les valeurs de H et H', il vient

$$H + A = \pi - e' - e,$$
$$H' + A = \pi + e - e',$$

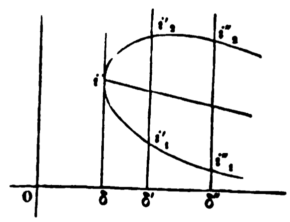
d'où

$$H + H' - 2A = 2\pi;$$

de sorte que la somme de $H + H'$ et du double de l'angle du prisme doit être égale à 2π. Si cette condition n'est pas satisfaite, le demi-excès sur 2π mesure l'erreur à craindre, c'est-à-dire l'approximation qu'on peut espérer des mesures.

Une seconde marche plus laborieuse, mais aussi plus exacte, a été également employée; elle est calquée sur celle qu'a imaginée Despretz pour déterminer la température du maximum de densité de l'eau; elle consiste à observer le minimum de déviation et les doubles incidences qui correspondent à deux déviations très-voisines de ce minimum. Si l'on se représente graphiquement (*fig.* 15) les déviations δ, δ', δ'' en

Fig. 15.



abscisses et les incidences i, i'_1, i'_2, i''_1, i''_2 correspondantes en ordonnées, on construira la conique osculatrice de la courbe $i = \varphi(\delta)$, définie par ces quatre points et par une tangente; il est inutile de construire cette conique, mais on obtiendra le point de contact en joignant les milieux des deux cordes parallèles. Une simple proportion permet donc de calculer l'ordonnée du point cherché; ce point définit l'incidence i, correspondant au minimum de déviation (*voir* plus loin, n° 48).

44. L'observation de l'inclinaison de l'image de la fente a été faite de deux manières. Il eût été plus commode d'avoir un micromètre semblable à ceux que les astronomes emploient au foyer des lunettes équatoriales, c'est-à-dire portant un fil mobile entraîné par l'alidade d'un cercle divisé, normal à l'axe optique de l'instrument. Le goniomètre dont on faisait usage ne portant pas une semblable pièce, on a dû utiliser d'autres moyens de mesure : on a profité de ce que la lunette était mobile autour de deux colliers concentriques à son axe optique. Dans le premier mode opératoire, on amenait le fil vertical de la lunette à coïncider avec l'image de la fente, par une rotation conve-

nable de la lunette autour de ses colliers; pour évaluer cette inclinaison, on en mesurait la tangente trigonométrique en ramenant la lunette dans l'alignement du collimateur; on mesurait alors la hauteur angulaire apparente de la fente verticale avec le fil devenu oblique; le quotient de cette lecture, par la valeur de la hauteur angulaire réelle de la fente, mesurée préalablement, donnait la tangente trigonométrique de l'angle cherché.

Ce procédé fort simple s'appliquerait à toutes les lunettes dont le tirage portant le réticule pourrait tourner autour de son axe de figure. L'autre mode opératoire a consisté à fixer sur la monture de la lunette un petit miroir permettant de mesurer la rotation autour des colliers, à l'aide d'une lunette auxiliaire et d'une échelle divisée; on faisait deux lectures : d'abord en fixant le zéro, c'est-à-dire l'azimut de la lunette, lorsque le fil vertical coïncidait avec l'image directe de la fente du collimateur; puis en ramenant dans cette même direction la lunette, après l'avoir tournée de l'angle convenable par la mise en coïncidence du fil avec l'image de la fente; les deux lectures de l'échelle divisée fournissaient les éléments de l'angle de rotation cherché (1).

L'exactitude de ces deux opérations est subordonnée tout entière à la netteté de l'image de la fente; on ne doit pas choisir une hauteur de fente trop considérable parce que l'image réfractée serait notablement arquée; il faut aussi qu'elle soit fine. C'est là que l'imperfection des surfaces, les phénomènes de diffraction dus à la petitesse, à la forme et à l'obliquité des faces du prisme jouent un rôle fâcheux; car ces causes tendent à élargir l'image optique, à en rendre les bords estompés et même à la déformer un peu. Pour éliminer cette influence,

---

(1) *Note sur le réglage de la fente.* — Il est nécessaire que la fente du collimateur soit bien verticale, c'est-à-dire exactement perpendiculaire au plan du limbe ou parallèle à l'axe de l'instrument. Pour obtenir cette condition, on dispose sur la plate-forme centrale une glace argentée, et on la règle à l'aide de la lunette (par réflexion normale et retournement), de manière que son plan soit parallèle à l'axe de l'instrument. Alors on observe la fente avec la lunette, en ayant soin de faire coïncider le fil vertical du réticule avec elle sur toute sa longueur; puis on observe l'image réfléchie sur la glace : si la fente est bien réglée, le réticule coïncide encore avec l'image, sinon l'angle des deux directions est le double de l'erreur de verticalité de la fente; on peut donc la corriger par les moyens de réglage dont on dispose

on a répété les mêmes mesures sur le rayon ordinaire et l'on a rapporté l'inclinaison de la fente, vue par réfraction extraordinaire, non pas à l'image directe, mais à l'image vue par réfraction ordinaire; c'est le résultat consigné dans le tableau suivant, dans la douzième série. Quoi qu'il en soit, dans le cas où quelque observateur voudrait effectuer des mesures analogues, on ne saurait trop lui conseiller de mettre un soin extrême à l'exécution des faces du prisme, tant au point de vue du poli que de la *planitude*, et, à cet effet, de choisir un prisme de spath ayant des dimensions aussi grandes que possible.

45. Nous allons déduire de ces données expérimentales les trois éléments géométriques de l'onde, réfractée dans l'intérieur du cristal, correspondant au minimum de déviation.

Ces trois éléments sont, ainsi qu'il a été dit au n° **5** (p. 233) :

1° La vitesse suivant la normale à l'onde plane;

2° L'angle que fait la direction lumineuse efficace avec cette normale;

3° L'orientation du plan parallèle à cette normale et au rayon efficace.

Il faut ajouter à ces trois éléments constitutifs de l'onde les éléments qui définissent sa position relativement au cristal. Dans les observations précédentes, l'onde plane réfractée étant, comme les ondes émergentes, parallèle à l'arête du prisme, sa position est déterminée par sa trace sur la section droite.

Soit α l'angle que forme la normale à cette onde plane réfractée avec la bissectrice intérieure de la section droite du prisme, suivant les conventions du n° **12** (*fig.* 12). On a (n° **20**, p. 247)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2}, \quad r + r' = A.$$

Cet élément de *position* se calcule par la formule du n° **35**,

$$\tang \alpha = -\frac{\nu}{\mu} \cot \frac{e - e'}{2},$$

dans laquelle

$$\mu = \frac{\cos \frac{A + D}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \quad \nu = \frac{\sin \frac{A + D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Le premier élément géométrique défini plus haut, à savoir la vitesse normale de propagation, est l'inverse de l'indice de réfraction actuel n; il est fourni par l'une ou l'autre des deux formules (10) du n° **15**, (p. 240) :

$$n = \nu \frac{\cos\frac{e-e'}{2}}{\cos\frac{r-r'}{2}} = \nu \frac{\cos\frac{e-e'}{2}}{\sin\alpha},$$

$$n = \mu \frac{\sin\frac{e-e'}{2}}{\sin\frac{r-r'}{2}} = -\mu \frac{\sin\frac{e-e'}{2}}{\cos\alpha},$$

lesquelles se servent mutuellement de contrôle pour le calcul numérique.

Les deux autres éléments qui se rapportent à la direction lumineuse efficace se déduisent très-simplement de la connaissance des coordonnées x_0, y_0, z_0 du point de contact de l'onde plane avec la surface d'onde. Les formules du n° **37** (p. 267), applicables au cas du minimum de déviation, donnent,

$$x_0 = -\frac{1}{\mu}\sin\frac{e-e'}{2}, \quad y_0 = +\frac{1}{\nu}\cos\frac{e-e'}{2}, \quad z_0 = -\frac{\cos e \cos e'}{\sin(A+D)}\operatorname{tang}\varphi'_0.$$

La projection du rayon lumineux efficace sur la section droite fait avec l'axe des x un angle α', tel que

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{y_0}{x_0};$$

la comparaison avec la valeur de $\operatorname{tang}\alpha$ montre que

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\mu^2}{\nu^2}\operatorname{tang}\alpha.$$

Comme vérification, il est bon de rappeler la relation du n° **24** (p. 253)

$$\operatorname{tang}^2\beta = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha',$$

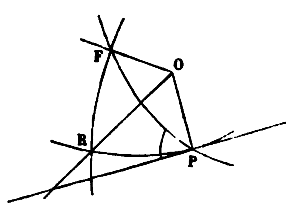
dans laquelle $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{e-e'}{2}$.

Le rayon lumineux fait avec le plan de la section droite un angle x, défini par

$$\tang x = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{z_0 \cos\alpha'}{x_0}.$$

On pourrait calculer aussi en fonction des x_0, y_0, z_0 l'angle ζ de la normale d'onde et du rayon efficace ; mais les expressions ne seraient pas calculables par logarithmes : aussi est-il plus commode d'employer la trigonométrie sphérique. Les trois directions ci-dessus indiquées forment les trois sommets d'un triangle sphérique rectangle, à savoir (*fig.* 16) :

Fig. 16.



OP normale d'onde,
OF rayon lumineux efficace,
OR projection du rayon sur la section droite,
$PR = \alpha - \alpha'$, $\widehat{FPR} = \Omega$,
$FR = x$,
$FP = \zeta$.

On conclut facilement

$$\tang x = \frac{z_0}{\frac{1}{n}\cos(\alpha - \alpha')} = \frac{n z_0}{\cos(\alpha - \alpha')},$$

relation qui fournit une vérification pour x :

$$\cos\zeta = \cos x \cos(\alpha - \alpha'), \quad \text{et aussi} \quad \tang\Omega = \frac{\tang x}{\sin(\alpha - \alpha')}.$$

46. Voici le résumé des observations faites avec ce prisme : le tableau comprend quatre colonnes principales qui renferment les observations angulaires, à savoir : les mesures relatives à l'angle du prisme, à la déviation minimum du rayon extraordinaire et aux incidences correspondantes. Comme vérifications ultérieures, on y a joint les mêmes mesures relatives au rayon ordinaire : les nombres de la colonne θ représentent la température ambiante de l'observation mesurée par un thermomètre placé le long du collimateur; les deux autres colonnes comprennent, l'une le résultat du contrôle indiqué au n° **43** (p. 9), l'autre les observations de l'inclinaison de l'image de la fente du collimateur.

SÉRIE.	DOUBLE de l'angle du prisme. 2A	θ	RAYON EXTRAORDINAIRE. DOUBLE DÉVIATION 2D	θ	DIFFÉRENCE des incidences $e'-e=H-H'$	θ	RAYON ORDINAIRE. DOUBLE DÉVIATION 2D	θ	DIFFÉRENCE des incidences $e'-e$	DIFFÉRENCE $(H+H'+2A-2\pi)$	VALEUR de $\tang \varphi'_e$.
1	120°.50′.47″	15°,8	86°.52′.33″	15°,8	5°.36′.59″	16°,0	105°.22′.48″	15°,8		+ 36′.50″	—0,011140
2	50.44	16,0	53.18	16,0	5.37.12	16,0	22.42	15,8		39. 2	
3	50.45	18,5									
4	50.39	12,1									
5	49.51	6,8					22.30	9,4			
6	50.38	20,6					23.41	21,0			
7	50.41	20,6									
8	50.11	15,8	53. 0	15,5			23.18	15,7			
9	50.54	17,3			5.35.20	17,0				4.50	
10	51. 8	12,7	52.21	12,5							
11	49.55	8,3	52.21	12,5							
12	50. 8	12,5	52.22	12,5							—0,010888
13	50.33	13,9	52.33	14,4			23.23	14,2			
14	50.23	15,5	52.42	15,4			23.26,3				
15	50.27	15,4									
16	50.14	12,5	52. 3	12,5	5.34.28	12,5	23. 7	12,5		— 5.25	
17	50.21	12,5									
18	50.18	12,0	52.44	12,0							
19	50.20	12,2									
20	50.29	13,9	52.42	14,0							
21	50.27	14,6	52.42	14,5	5.38.22	14,5				— 2.20	
22	50.26	12,9	52.37	13,0							
23	50.32	13,4	52.35	13,5	5.37.51	13,5	23.26	12,4	—0°.0′.26″	+ 1.31	
24	50.10	12,2					23.24	12,5			
25	50.13	12,6					23.16	12,6			

47. La concordance de ces observations est très-satisfaisante; on pourrait prendre la moyenne de chaque colonne comme point de départ des calculs ultérieurs; mais, comme la variation des éléments avec la température n'est pas à négliger, il vaut mieux choisir une série qui ait été faite complétement dans les mêmes circonstances. La meilleure, sous ce rapport, et surtout relativement à la régularité des mesures, est celle qui porte le n° 23; en effet, c'est celle qui présente la vérification indiquée au n° 43 avec la plus grande approximation, ainsi que le montre la colonne intitulée *différence*, $H + H' + 2A - 2\pi$. De plus, la même série d'opérations appliquée au rayon ordinaire fournit un autre contrôle; on devrait avoir $e' - e = 0$; l'observation a donné $e' - e = -0°0'26''$: ce qui tendrait à prouver que l'erreur est négative et égale environ à $26''$, valeur de même ordre que la moitié de la différence $H + H' + 2A - 2\pi = 1'31''$.

On adoptera donc, pour tous ces motifs, la série n° 23.

Détail des observations.

48. Le tableau précédent n'indique que le résumé des séries; celui qui va suivre donnera une idée complète des observations avec le détail des lectures du cercle et des verniers; c'est la série n° 23, elle fournit la valeur des incidences correspondant au minimum de déviation par la seconde méthode du n° 43.

Le cercle est divisé de 0 à 360 degrés dans le sens des aiguilles d'une montre : les divisions représentent 5 minutes; les deux verniers permettent de lire 3 secondes et d'estimer $1'',5$. On n'a écrit que la moyenne des deux lectures des verniers, à 180 degrés de distance, ce qui donne parfois des quarts de seconde.

1° *Observation préliminaire.*

Direction des rayons incidents (zéro arbitraire)
venant du collimateur.................... $90°2'20'',25$.

Cette lecture sert de vérification pour empêcher les erreurs d'inadvertance dans la mesure des doubles déviations.

2° Angle du prisme.

Arête placée du côté du collimateur : les rayons incidents se réfléchissent simultanément à gauche et à droite, sur les faces M et N; $\theta = 12°,9$.

Lecture à gauche...........	155°29′34″,5	d'où $2A = 120°50'25'',5$
Lecture à droite............	34°39′ 9″,0	

3° Déviation minimum.

Opération comme à l'ordinaire; $\theta = 13°,0$:

Déviation à gauche (incidence sur la face M)............	133°28′26″,25	$2D = 86°52'36'',75$.
Deviation à droite (incidence sur la face N)............	46°35′49″,50	
Somme......	180° 4′15″,75	

4° Incidences voisines de celle qui correspond au minimum de déviation.

Réflexion sur la face N.

La déviation minimum à droite correspondait à l'azimut 46°35′49″,50; on déplace la lunette jusqu'à 46°35′0″, alors la déviation correspond à deux positions du prisme; on règle soigneusement le prisme dans les deux positions qui amènent l'image lumineuse sur le réticule de la lunette, placée à 46°35′0″, et l'on déplace la lunette de façon à recevoir le rayon réfléchi ; on obtient les deux lectures suivantes :

158°42′42″,75	Moyenne... 160°32′0″,75.
162°21′18″,75	

De la même manière, après avoir déplacé la lunette jusqu'à 46°34′0″, on a obtenu

157°53′27″,00	Moyenne... 160°25′14″,63.
163° 7′ 2″,25	

5° Déviation minimum.

Pour contrôler la stabilité du cercle et l'invariabilité des déviations, on a répété la mesure de la déviation minimum, avant de passer à l'autre série; $\theta = 13°,5$.

Déviation à droite (incidence sur N).	46°35′53″,25	2D = 86°52′33″,75.
Déviation à gauche (incidence sur M).	133°28′27″	
Somme.....	180° 4′20″,25	

Les azimuts ont varié l'un de 0″,75, l'autre de 3″,5, quantités excessivement petites et dues probablement à la variation de température.

6° *Incidences voisines de celle qui correspond au minimum de déviation.*

Réflexion sur la face M; $\theta = 13°,2$:

Lunette à 133°29′0″..... $\begin{cases} 6°48′35″ \\ 9°41′48″ \end{cases}$ Moyenne... 8°15′12″,

Lunette à 133°30′0″..... $\begin{cases} 5°49′\ 3″ \\ 10°41′27″ \end{cases}$ Moyenne... 8°15′15″.

7° *Déviation minimum.*

Incidence sur M.....	133°28′36″,75	2D = 86°52′45″,75.
Incidence sur N.....	46°35′51″,00	
Somme.....	180° 4′27″,75	

8° *Angle du prisme.*

La température est alors $\theta = 13°,4$.

156°24′21″,75
35°33′50″,25 2A = 120°50′31″,5.

La température ayant été en croissant d'une manière régulière, on a éliminé son influence par le mode d'observations croisées qu'on a adopté : ainsi l'on prendra pour l'angle du prisme la moyenne des deux valeurs du commencement et de la fin de la série

$$2A = 120°50′28″,5.$$

La déviation sera la moyenne des deux valeurs correspondantes du commencement et de la fin :

$$2D = 86°52′40″,50.$$

Il reste à calculer les azimuts de réflexion pour en déduire les incidences.

1° *Réflexion sur* N.

$$\text{Azimut de déviation minimum}\ldots \left\{\begin{array}{ll} 46^\circ 35' 49'',50 & \text{avant la série,} \\ 46^\circ 35' 53'',25 & \text{après la série,} \end{array}\right.$$

$$\text{Moyenne}\ldots\ldots \quad \overline{46^\circ 35' 51'',38}$$

Tel est l'azimut qu'on adoptera pour la déviation minimum, et l'on écrira

$$\begin{array}{lll} \text{A } 46^\circ 35' 51'',38 & \multirow{2}{*}{$51'',38$} & \text{correspond l'azimut } x' \\ \text{A } 46^\circ 35' \ 0'',00 & & 160^\circ 32' \ 0'',75 \\ \text{A } 46^\circ 34' \ 0'',00 & 60'',00 & 160^\circ 30' \ 14'',63 \quad 1'46'',12 \end{array}$$

d'où l'on conclut

$$\frac{x - 160^\circ 32' 0'',75}{51'',38} = \frac{106'',12}{60''},$$

d'où

$$x' = 160^\circ 33' 31'',64$$

$$\begin{array}{lr} \text{Retranchant l'azimut de la déviation minimum.} & \underline{46^\circ 35' 51'',38} \\ \text{Il vient}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \pi + D - 2e' = H' = & 113^\circ 57' 40'',26 \end{array}$$

2° *Réflexion sur* M.

$$\text{Azimut de déviation minimum}\ldots \left\{\begin{array}{rl} 133^\circ 28' 27'',00 & \text{avant la série,} \\ 36'',75 & \text{après la série.} \end{array}\right.$$

$$\text{Moyenne}\ldots\ldots \quad \overline{133^\circ 28' 31'',88}$$

d'où l'on conclut le tableau suivant :

$$\begin{array}{lll} \text{A } 133^\circ 28' 31'',88 & 29'',12 & \text{correspond l'azimut } x \\ \text{A } 133^\circ 29' \ 0'',00 & & 8^\circ 15' \ 12'',00 \\ \text{A } 133^\circ 30' \ 0'',00 & 60'',00 & 8^\circ 15' \ 15'',00 \quad 3'',00 \end{array}$$

donc

$$\frac{x - 8^\circ 15' 12''}{29,12} = -\frac{3''}{60},$$

d'où

$$x = 8^\circ 15' 10'',54$$

Retranchant x de l'azimut de déviation minimum. $133^\circ 28' 31'',88$

Il vient.................. $\pi + D - 2e = H = 125^\circ 13' 21'',34$

Les valeurs de H et H' satisfont à la vérification $H + H' + 2A = 2\pi$:

$$\begin{aligned} H &= 125^\circ 13' 21'',34 \\ H' &= 113^\circ 57' 40'',26 \\ 2A &= 120^\circ 50' 28'',50 \\ \hline H + H' + 2A &= 360^\circ\ 1' 30'',10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} H - H' = 2(e' - e) &= 11^\circ 15' 41'',08 \\ e' - e &= 5^\circ 37' 50'',54 \end{aligned}$$

L'excès est de $1'30'',10$; l'erreur à craindre sur $e' - e$ doit donc être de l'ordre de $\frac{1}{2}(1^\circ 30'',10) = 45'',05$.

Les valeurs de H et H' jointes à celles de A et D fournissent une relation de trop, et comme la vérification précédente n'est pas rigoureusement satisfaite, il y a lieu de choisir la donnée à supprimer pour faire les calculs. Évidemment, les incertitudes sont surtout à craindre sur H et H'; si l'on n'utilise que leur différence $H = H' = 2(e' - e)$, ces données entreront d'une manière aussi symétrique que possible : on aura donc comme données définitives

$$2A, \ 2D = 2(e + e') - 2A \quad \text{et} \quad H - H' = 2(e' - e),$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} A &= 60^\circ 25' 14'',25 \\ D &= 43^\circ 26' 20'',25 \\ e &= 49^\circ\ 6' 51'',98 \text{ (réflexion sur M)} \\ e' &= 54^\circ 44' 42'',52 \text{ (réflexion sur N)} \end{aligned}$$

C'est avec ces données expérimentales que le calcul des éléments de l'onde réfractée a été effectué; les résultats obtenus sont consignés dans la deuxième colonne du tableau ci-après; la troisième contient ceux qui sont obtenus par la méthode décrite dans les paragraphes qui suivent.

ÉLÉMENTS A DÉTERMINER	RÉSULTATS NUMÉRIQUES d'après les théorèmes généraux et les observations précédentes.	RÉSULTATS NUMÉRIQUES d'après l'orientation cristallographique du prisme et les données de Rudberg.
$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2}$	$\alpha = 88^\circ 42' 54'', 79$ $\alpha' = 83^\circ 50' 44'', 04$	$88^\circ 42' 17'', 87$ $83^\circ 47' 42'', 68$
Indice de réfraction.................	$n = 1,563079$	$1,563093$
Angle du rayon projeté et de la normale d'onde..........................	$\alpha - \alpha' = 4^\circ 52' 15'', 07$	$4^\circ 54' 35'', 19$
Distance du point de contact de la surface d'onde à la section droite du prisme.	$z_e = + 0,042280$	$+ 0,042692$
Angle du rayon avec la section droite.	$\varkappa = 3^\circ 47' 47'', 5$	$3^\circ 48' 13'', 75$
Angle de la normale d'onde et du rayon.	$\zeta = 6^\circ 10' 7''$	$6^\circ 12' 28'', 90$
Angle du plan contenant le rayon et la normale d'onde avec le plan de la section droite......................	$\Omega = 38^\circ \ 0', 5''$	$37^\circ 50' 28'', 37$
Indice du rayon ordinaire...........	$n_o = 1,658347$	$n_o = 1,65846$ raie D.

Calcul théorique des résultats précédents.

49. Le contrôle de ces résultats a été obtenu par leur comparaison avec ceux qu'on déduit de la connaissance de la surface d'onde du spath d'Islande. Le calcul ne laisse pas que d'être assez laborieux, surtout à cause des calculs préliminaires relatifs à l'orientation de l'axe optique par rapport aux faces artificielles du prisme; les résultats sont consignés daus la troisième colonne du tableau précédent. Voici la marche qui a été suivie.

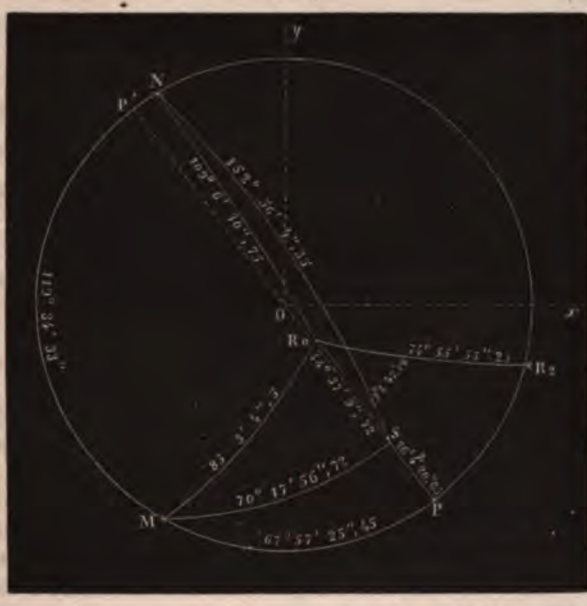
La première opération a consisté à rapporter les deux faces artificielles du prisme MN aux faces du rhomboèdre. Le parallélépipède de spath, ayant été choisi parmi un grand nombre d'échantillons, présen-

tait des clivages remarquables par leur poli et la perfection de leur plan : aussi les mesures angulaires dont le détail va suivre se sont-elles effectuées avec une grande exactitude.

Pour se rendre compte des calculs de trigonométrie à effectuer, il est nécessaire d'employer le mode de représentation graphique usité en cristallographie, à savoir la représentation sphérique des normales au polyèdre en projection stéréographique ; à cet effet, on suppose que les directions des normales à toutes les faces du polyèdre passent par le centre d'une sphère et vont percer la sphère en des points qui définissent complétement les faces en direction. Ce sont ces traces qu'on projette stéréographiquement sur un plan convenablement choisi ; ce mode de projection jouit, comme on sait, de la double propriété qu'un cercle tracé sur la surface de la sphère se projette suivant un cercle et que les angles se conservent en projection.

La *fig.* 17 représente stéréographiquement les normales aux faces MN

Fig. 17.



du prisme et aux trois faces du rhomboèdre R_0, R_1, R_2. Le plan de projection est le plan des deux normales MN ou plan de la section

droite du prisme : on remarquera que la normale à R_2 est un peu au-dessous du plan de MN. Par l'observation au goniomètre, on a mesuré le double de chaque angle dièdre ; voici les résultats obtenus ou plutôt le supplément de la moitié de ces lectures, c'est-à-dire l'angle des normales représentées sur la figure :

$$\widehat{MN} = 119°34'33'',00 \text{ [1]},$$
$$\widehat{MR_1} = 83°\ 3'\ 4'',5,$$
$$\widehat{NR_1} = 109°\ 6'30'',75,$$
$$\widehat{MR_2} = 105°18'\ 6'',75,$$
$$\widehat{R_1R_2} = 74°55'55'',25.$$

Comme vérification on a mesuré un angle surabondant

$$\widehat{NR_2} = 135°6'48'',75;$$

on a, en effet,

$$\widehat{MN} + \widehat{MR_2} + \widehat{NR_2} = 359°59'28'',5 = 2\pi - 31'',5.$$

Les trois faces M, N, R_2 n'étant pas rigoureusement parallèles à une même droite, les trois normales ne sont pas dans un même plan, et, par suite, la somme des trois angles doit être un peu inférieure à 360 de-

---

[1] On remarquera une légère différence entre l'angle MN observé dans cette série

$$A = 60°25'27'', \quad \theta = 17°,2,$$

et la valeur obtenue dans la série n° 23, employée dans les calculs antérieurs,

$$A = 60°25'14'',25, \quad \theta = 13°,3;$$

mais cette différence ($12'',75$) s'explique très-bien par la différence de température ; d'après la discussion de l'ensemble des séries, l'angle du prisme croîtrait d'environ 3 secondes pour un accroissement de la température de 1 degré. Malgré cette petite divergence, on n'a pas cru devoir modifier la seconde valeur de l'angle du prisme pour le calcul théorique des éléments de l'onde réfractée ; la comparaison du nouveau calcul avec les résultats obtenus par la première méthode est donc entachée d'une petite erreur d'environ 12 à 15 secondes ; mais cette erreur est négligeable vis-à-vis de l'incertitude qui pèse sur la détermination expérimentale de $e - e'$, laquelle peut s'élever de 1 à 2 minutes. D'ailleurs cette comparaison est destinée bien plutôt à montrer la validité et l'usage commode des théorèmes géométriques employés qu'à faire une confrontation rigoureuse du calcul et de l'observation.

grés : le sens de la différence est donc une vérification qualitative des mesures.

Les calculs de trigonométrie sphérique qu'on a à effectuer ne présentent aucune difficulté; mais ils sont fort longs par eux-mêmes et par les vérifications qu'on est obligé de faire.

Pour définir l'orientation de l'axe optique S (*fig.* 17), relativement aux faces du prisme, on a choisi deux angles, à savoir :

1° L'azimut xOP' du plan projetant cet axe sur le plan de la section droite, compté à partir de l'axe des x ou bissectrice intérieure du prisme,

$$\sigma = 127^\circ 44' 41'',95;$$

2° L'angle $\widehat{SP}$ que fait cet axe avec le plan de la section droite

$$\omega = 26^\circ 4' 20'',65.$$

Ces résultats ont été obtenus par la marche suivante :

1° On a adopté comme angle du rhomboèdre la valeur

$$\widehat{R_0 R_2} = 74^\circ 55' 55'',25;$$

on a calculé l'angle $\widehat{R_0 S}$ que fait l'axe S avec la face R_0; on trouve

$$SR_0 = 44^\circ 37' 9'',72,$$

et pour l'angle

$$SR_0 R_2 = 39^\circ 2' 47'',06;$$

2° On a calculé l'angle dièdre MR_0R_2, d'après la connaissance de $\widehat{MR_0}$, $\widehat{R_0R_2}$, $\widehat{R_2M}$,

$$MR_0 R_2 = 107^\circ 56' 48'',80$$

(vérifié par le calcul direct des deux autres dièdres et de l'excès sphérique).

Par soustraction on a obtenu le dièdre MR_0S,

$$MR_0 S = 68^\circ 54' 1'',74.$$

3° On a calculé l'angle dièdre $\widehat{MR_0N}$,

$$MR_0 N = 118^\circ 56' 48'',70$$

(vérifié par le calcul direct des deux autres dièdres et de l'excès sphérique.

D'où l'on a conclu par addition avec l'angle précédent,

$$NR_0S = 172^\circ 9' 9'', 56.$$

La connaissance de ces deux angles a permis de calculer de deux manières différentes les angles σ et ω définis plus haut : il ne reste plus en effet qu'à résoudre un triangle rectangle, connaissant un côté et l'angle adjacent; les résultats des deux calculs ont été concordants à quelques centièmes de seconde; les dièdres qu'il fallait connaître étaient

$$R_0NM = 92^\circ 49' 53'', 26,$$
$$R_0MN = 108^\circ\ \ 3' 37'', 70;$$

ils avaient déjà été calculés dans le triangle MNR_0.

50. La connaissance de la position de l'axe optique relativement aux faces du prisme permet d'appliquer les données de Rudberg au calcul théorique des éléments de l'onde réfractée. Les formules à employer sont celles du n° **22**, p. 250, à savoir (29) et (30).

Calcul des éléments de l'onde réfractée au minimum de déviation. — L'équation (29) développée se met sous la forme

$$\frac{1}{\mu^2\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}(a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma) - \frac{1}{\nu^2}(a^2\cos^2\sigma + b^2\sin^2\sigma) + a^2b^2 = 0,$$

dans laquelle a et b sont les axes de l'ellipse qui forme la ligne d'onde sur la section droite. Si l'on convient de réserver les lettres a et b pour désigner le demi-axe longitudinal et le demi-axe équatorial de l'ellipsoïde d'Huyghens, l'ellipse considérée aura aussi b comme demi-axe perpendiculaire à la projection de l'axe optique (parce que l'axe équatorial se projette en vraie grandeur) et pour axe perpendiculaire la valeur a', tel que

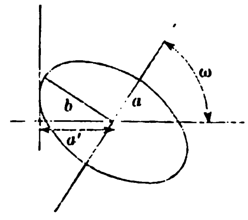
$$a'^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega,$$

ω étant l'angle que fait l'axe de l'ellipsoïde de révolution avec le plan de la section droite (*fig.* 18).

La direction α de la normale à l'onde plane réfractée, qui correspond au minimum de déviation, est fournie par les formules (30)

$$(30)\qquad \cot\alpha = -\frac{(a^2-b^2)\sin\sigma\cos\sigma}{a^2\cos^2\sigma+b^2\sin^2\sigma-\frac{1}{\mu^2}} = +\frac{a^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma-\frac{1}{\nu^2}}{(a^2-b^2)\sin\sigma\cos\sigma}.$$

Fig. 18.



Dans ces formules a ou a', b et σ sont connus, mais μ et ν, qui renferment la valeur de la déviation, ne le sont pas; il faut éliminer ces deux inconnues entre l'équation de l'ellipse et la suivante, bien connue (16, p. 246),

$$(16)\qquad \mu^2\cos^2\frac{A}{2}+\nu^2\sin^2\frac{A}{2}=1.$$

A cet effet, on tire μ^2 et ν^2 des deux équations (30), en fonction de $\cot\alpha$, et l'on substitue dans l'équation (16). On arrive, après quelques transformations faciles, à l'équation du second degré

$$NQ\tan^2\alpha+(MN-P^2+Q^2)\tan\alpha+MQ=0,$$

dans laquelle

$$M = a'^2\cos^2\sigma+b^2\sin^2\sigma-\cos^2\frac{A}{2},$$
$$N = a'^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma-\sin^2\frac{A}{2},$$
$$P = \sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2},$$
$$Q = (a'^2-b^2)\sin\sigma\cos\sigma,$$
$$a'^2 = a^2\cos^2\omega+b^2\sin^2\omega.$$

L'équation en $\tan\alpha$ se résout sans difficulté : quant à la racine à adopter, elle se reconnaît aisément par la condition que l'onde réfractée

doit être à peu près parallèle à la bissectrice de la section droite du prisme, c'est-à-dire que α doit être voisin de 90 degrés.

L'indice de réfraction de l'onde plane au minimum de déviation s'obtient en substituant la valeur de α dans l'équation (22) du n° **22**, p. 248,

$$\frac{1}{n} = p' = \sqrt{a'^2 \cos^2(\alpha - \sigma) + b^2 \sin^2(\alpha - \sigma)}.$$

La connaissance de l'indice permet de calculer les angles d'émergence, car on a

$$\frac{r - r'}{2} = \alpha - \frac{\pi}{2}; \quad \sin e = n \sin r,$$

$$\frac{r + r'}{2} = \frac{A}{2}, \quad \sin e' = n \sin r'.$$

Comme vérification, on se sert de la formule

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{r - r'}{2}}{\operatorname{tang}\frac{r + r'}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{e - e'}{2}}{\operatorname{tang}\frac{e + e'}{2}}.$$

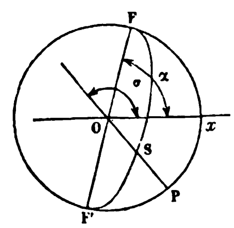
L'angle de la projection du rayon avec l'onde plane est donné par l'expression (34), n° **23**, p. 252,

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\mu^2}{\nu^2}\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang}^2\frac{A}{2}}{\operatorname{tang}^2\frac{e + e'}{2}}\operatorname{tang}\alpha,$$

d'où l'on tire $\alpha - \alpha'$, angle cherché.

L'angle du rayon lumineux avec la normale à l'onde plane se déduit de la même propriété géométrique appliquée à l'ellipse méridienne. A cet effet, on commence par calculer (*fig.* 19) l'angle θ que

Fig. 19.



fait la direction α (représenté par F sur la figure) avec l'axe optique S : le triangle sphérique rectilatère FOS donne sans difficulté

$$\cos\theta = \sin\widehat{OS}\cos FOS = -\sin\omega\cos(\sigma - \alpha),$$

appliquant le théorème

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\theta,$$

d'où l'on conclut $\theta - \theta'$.

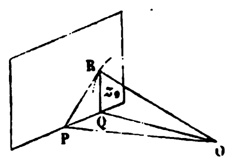
C'est l'angle appelé ζ au n° 45, p. 13.

L'angle du plan de l'axe optique et de la normale d'onde avec la section droite Ω se calcule aussi à l'aide du même triangle SOF : c'est le complément de F; ou mieux à l'aide du triangle rectangle SPF' où il est représenté par F',

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang}\Omega\sin(\sigma - \alpha).$$

Enfin la coordonnée z_0, distance du point de contact de la surface d'onde à la section droite (*fig.* 20) (z_0 est positif comme étant au-dessus de ce plan).

Fig. 20.



Sur la figure, le plan PRQ représente le plan d'onde, OP la normale d'onde, O le centre de l'ellipsoïde, R le point de contact,

$$z_0 = RQ, \quad OP = \frac{1}{n}, \quad POR = \alpha - \alpha' \quad \text{et} \quad RPQ = \Omega, \quad ROQ = \varkappa.$$

Exprimant z_0 de trois manières, il vient

$$z_0 = \frac{1}{n}\operatorname{tang}(\theta - \theta')\sin\Omega = \frac{1}{n}\frac{\operatorname{tang}\varkappa}{\cos(\alpha - \alpha')} = \frac{1}{n}\operatorname{tang}(\alpha - \alpha')\operatorname{tang}\Omega,$$

où l'on retrouve les formules de la page 13, n° 45 : on peut donc calculer Ω, $\varkappa$ et z_0.

51. Les nombres qui figurent dans la troisième colonne du tableau de la page 21, n° 48, ont été obtenus à l'aide de ces formules par la substitution des valeurs

$$\omega = 26^\circ\ 4'\ 20'',65,$$
$$\sigma = 127^\circ 44' 41'',95,$$
$$A = 60^\circ 25' 27'',00,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a} &= n_o = 1,65846 \\ \frac{1}{b} &= n_e = 1,48635 \end{aligned}\right\} \text{pour la raie D (Rudberg).}$$

Les différences entre les résultats déduits des théorèmes généraux et ceux déduits de l'ellipsoïde d'Huyghens sont partout assez faibles. La plus grande concordance correspond aux valeurs de α et de n, où elle est véritablement remarquable; la plus grande discordance a lieu pour Ω : elle s'élève à $9\frac{1}{2}$ minutes; mais il y a lieu de remarquer que cet azimut est, par sa nature même, assez mal défini au point de vue expérimental, puisque la normale d'onde et le rayon efficace qui déterminent l'un des deux plans du dièdre font un angle très-petit ($6^\circ 10'$). Quant aux autres valeurs, elles s'accordent en général à 2 minutes près; c'est l'ordre d'approximation qu'impose la détermination de $e' - e$ et φ'_0.

En résumé, on peut conclure que les théorèmes généraux démontrés précédemment sont vérifiés par l'expérience; leur simplicité relative dans une question si complexe rend leur emploi très-commode. On peut affirmer, en outre, que dans un cas très-général l'ellipsoïde de Huyghens rend un compte aussi précis que possible des observations. Ces expériences et ces calculs confirment donc l'exactitude, la validité de la forme de la surface d'onde adoptée pour les cristaux uniaxes.

Remarque. Pour avoir un contrôle plus direct des nombres de Rudberg, on a observé dans la même série la déviation minimum du rayon ordinaire : en mesurant à nouveau l'angle du prisme, on a trouvé

$$\begin{aligned} 2D_o &= 105^\circ 23'\ 24'',00, \\ 2A &= 120^\circ 50'\ 11'',25, \end{aligned} \quad \theta = 12^\circ,4.$$

De ces données, on a déduit l'indice de réfraction ordinaire du spath d'Islande correspondant à la raie D

$$n_o = 1,658389,$$

qui ne diffère du nombre de Rudberg que d'une quantité presque insignifiante.

Vérification expérimentale du cas où le prisme produit une déviation constante et indépendante de l'incidence.

52. Les observations et les calculs précédents ont été effectués spécialement en vue de la vérification des théorèmes généraux qui définissent les éléments géométriques d'une onde réfractée, indépendamment de la connaissance de la surface de l'onde; l'introduction, dans le second calcul, de l'ellipsoïde de Huyghens fournit une vérification laborieuse, il est vrai, mais très-effective, de la nature de la surface d'onde des cristaux uniaxes.

Mais on pourrait objecter que les petites divergences, inévitables dans des observations aussi délicates, sont peut-être causées par l'inexactitude de la forme adoptée comme surface d'onde; heureusement on peut trouver, parmi les propriétés géométriques exposées dans la première partie de ce Mémoire, un phénomène qui permet de vérifier *synthétiquement* l'exactitude de la forme ellipsoïdale de la surface de l'onde du spath d'Islande : c'est le phénomène correspondant aux théorèmes qui font l'objet de la Note du n° **16**. On peut résumer ainsi les propositions démontrées dans cet article :

Si l'on considère un prisme dont la ligne d'onde correspondant à la section droite ait ses axes orientés parallèlement aux bissectrices de cette section

$$M^2 x^2 + N y^2 = 1,$$

ce prisme produira une déviation constante D, indépendante de l'incidence des rayons, lorsqu'il sera placé dans un milieu dont l'indice sera k, à la condition qu'on ait

$$\text{(K)} \qquad \text{tang}^2 \frac{A}{2} = \frac{M^2 - k^2}{k^2 - N^2},$$

la déviation constante étant donnée par la formule

$$\text{(K')} \qquad \text{tang} \frac{A + D}{2} = \frac{N}{M} \text{tang} \frac{A}{2}.$$

53. Il est facile de démontrer la proposition réciproque, à savoir que, si un prisme produit une déviation constante et indépendante de l'incidence, la ligne d'onde correspondant à la section droite est nécessairement elliptique.

En effet, d'après l'équation (12) du n° **15**, p. 240, on a, dans le cas général, pour l'indice de l'onde réfractée correspondant à un angle A et une déviation D qui définissent μ et ν,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\mu^2}\sin^2\frac{r-r'}{2} + \frac{1}{\nu^2}\cos^2\frac{r-r'}{2};$$

substituant $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{r-r'}{2}$, α étant l'angle avec l'axe des x de la normale à l'onde plane réfractée,

$$p^2 = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\mu^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{\nu^2}\sin^2\alpha.$$

Si D est indépendant de e et e', c'est-à-dire de r et r' ou α, μ et ν sont des constantes, et l'on a, pour la loi qui lie la vitesse de propagation p de l'onde réfractée avec sa direction,

$$p^2 = \frac{1}{\mu^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{\nu^2}\sin^2\alpha.$$

L'enveloppe de cette onde plane, sur la section droite ou ligne d'onde, est l'ellipse

$$\mu^2x^2 + \nu^2y^2 = 1.$$

Cette ellipse doit donc être identique à l'ellipse du milieu considéré

$$M^2x^2 + N^2y^2 = k^2,$$

k étant l'indice du milieu extérieur : l'identification conduit aux deux formules rapportées plus haut (K), (K').

54. Il était donc très-naturel de soumettre l'ellipsoïde à cette vérification : la difficulté pratique était de parvenir, pour le liquide, à l'indice convenable k : là une étude approfondie des données mêmes de la question a permis une grande simplification expérimentale.

Le prisme de spath d'Islande le plus facile à utiliser était évidemment l'angle aigu ou l'angle obtus d'un rhomboïde de clivage; or il se

rencontre une simplification inattendue lorsqu'on opère à la fois sur l'angle aigu et l'angle obtus : c'est que l'indice du liquide fournissant la déviation constante est le même dans les deux cas, et que de plus cette déviation constante reste la même en valeur absolue, mais se trouve de signe contraire.

En effet, lorsqu'on intervertit l'angle aigu et l'angle obtus, on intervertit les axes de l'ellipse dans la section droite : la première formule (K) devient donc

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)=\frac{N^2-k^2}{k^2-M^2}=\cot^2\frac{A}{2},$$

c'est-à-dire reste identique après la substitution; la seconde (K′) devient

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\frac{D}{2}\right)=\frac{M}{N}\cot^2\frac{A}{2}=\cot^2\left(\frac{A}{2}-\frac{D}{2}\right),$$

qui s'identifie avec la première forme en changeant le signe de D.

55. La méthode d'observation destinée à vérifier ces particularités curieuses de la réfraction extraordinaire, dans un cas très-général, devient très-facile à mettre en œuvre d'après les propositions qu'on vient de démontrer.

Le rhomboïde de spath d'Islande était soutenu par un support particulier, formé d'une petite plaque au-dessous de laquelle il était fixé; cette petite plaque était, par l'intermédiaire de trois vis de réglage, soudée à la partie inférieure d'une tige glissant à frottement dans un tube fixé lui-même à une potence; cette tige faisait fonction d'axe vertical et, à l'aide du réglage, on disposait quatre des arêtes du rhomboïde parallèlement à cet axe : le tout était disposé sur la plate-forme du goniomètre.

Une petite cuve de verre, à faces bien planes et parallèles, contenait le liquide; le rhomboïde y plongeait et pouvait y tourner librement dans tous les azimuts.

Quant au liquide, il était en grande partie formé d'essence de girofle ($n=1{,}5345$, raie D), dont l'indice est très-voisin de l'indice convenable (théoriquement $1{,}537182$); pour augmenter l'indice, on ajoutait quelques gouttes d'essence de cannelle ($n=1{,}610$); dans le cas où l'on dépassait la limite, on abaissait l'indice avec de l'essence de térébenthine ($n=1{,}48$).

Il eût été très-incommode de composer le liquide en prenant comme base la valeur numérique de son indice; les déterminations eussent été fastidieuses, d'autant plus que l'évaporation inégale des essences était un obstacle presque insurmontable pour l'obtention d'un résultat précis. Heureusement le phénomène lui-même indiquait si l'indice était trop élevé ou trop faible; en effet, lorsque l'indice était voisin de la valeur limite, la déviation du rayon émergent était presque constante, mais elle n'avait pas atteint sa vraie valeur; pour l'angle aigu, elle était au-dessus, pour l'angle obtus au-dessous. Comme les rayons incidents traversaient à la fois les deux angles aigus ou les deux angles obtus, suivant l'azimut du cristal, on pouvait recevoir successivement, dans le champ de la lunette, la déviation à droite de l'angle aigu de gauche, par exemple, et la déviation à droite de l'angle obtus de droite; ces deux déviations, égales lorsque l'indice est arrivé à la limite, ne le sont pas dans le cas contraire. Pour savoir s'il fallait augmenter ou diminuer l'indice, on examinait laquelle des deux déviations était la plus grande; la règle était celle-ci : l'indice est *trop fort* si la déviation est *plus forte* que celle de l'angle aigu, et réciproquement; un moment d'attention la rend évidente.

56. En opérant ainsi, on arrivait à coup sûr à obtenir deux déviations aussi égales que possible, et l'on vérifiait que la déviation était constante et indépendante de l'incidence. Ce phénomène présente ainsi *deux vérifications*, l'une *qualitative*, à savoir l'existence d'un indice extérieur produisant une déviation indépendante de l'incidence; l'autre *quantitative*, l'égalité, au signe près, des deux déviations constantes pour des prismes supplémentaires dont les bissectrices intérieures sont cristallographiquement rectangulaires. Mais il présente une troisième vérification numérique très-importante, c'est l'accord de la déviation observée avec la valeur théorique de cette déviation, calculée d'après l'ellipsoïde d'Huyghens et les données de Rudberg; pour effectuer ce calcul, il suffit de connaître les axes de l'ellipse, projection orthogonale de l'ellipsoïde sur le plan de la section droite du prisme.

A cet effet, on commence par calculer l'angle v que fait l'arête du rhomboèdre avec l'axe; pour cela on a déterminé l'angle du rhomboïde de clivage sur lequel on a opéré, et l'on a trouvé sur les quatre

arêtes réfringentes (α, β, α', β', désignant les quatre faces)

$$\begin{array}{ll} \widehat{\alpha\,\beta} = 105^\circ 4' 15'', & \widehat{\alpha\,\beta'} = 74^\circ 56' \; 1'', \\ \widehat{\alpha'\beta'} = 105^\circ 4' \; 5'', & \widehat{\alpha'\beta} = 74^\circ 56' 15'', \end{array} \quad \theta = 17^\circ,2.$$

La somme des quatre angles égale $360^\circ 0' 36''$; il y a donc une petite erreur de 36 secondes à répartir sur les quatre angles (due probablement à un défaut de réglage des arêtes à mesurer), ce qui conduit à la valeur définitive pour l'angle du rhomboèdre

$$\widehat{\alpha\beta} = 105^\circ 4' 1'',$$

valeur qui diffère si peu de celle qui fait partie de la série relative au prisme à faces artificielles [1]

$$R = 105^\circ 4' 4'',75, \quad \theta = 17^\circ,4,$$

qu'on n'a pas cru devoir la substituer à ce dernier nombre admis comme une donnée fondamentale dans tous les calculs de ce Mémoire.

La formule à employer s'obtient en considérant un trièdre rectangle ayant pour arêtes, l'arête du rhomboèdre, l'axe et la trace sur l'une des faces du rhomboèdre du plan projetant cet axe,

$$\cos v = \cot 60^\circ \cot \frac{R}{2},$$

d'où

$$v = 63^\circ 44' 17'',69.$$

L'ellipse, projection de l'ellipsoïde, aura pour axe perpendiculaire à la projection de l'axe optique la valeur même de l'axe équatorial $2b$, qui se projette en vraie grandeur; suivant l'axe optique, l'axe de l'ellipse sera $2a''$,

$$a''^2 = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v;$$

---

[1] Ces mesures montrent combien la structure du spath d'Islande est régulière, puisque deux échantillons, pris au hasard, donnent, pour l'angle de leurs clivages, des nombres identiques; toutefois il est bon d'ajouter que ces deux échantillons sont de la même provenance.

numériquement, d'après les indices de Rudberg,

$$\frac{1}{a''} = 1{,}620061 = \text{M}\ (^1),$$

$$\frac{1}{b} = 1{,}46835 \quad = \text{N}.$$

Appliquant les formules (K) et (K′), on trouve pour l'indice du liquide k et pour la déviation D

$$k = 1{,}537182,$$
$$\text{D} = 4°48'50'',04.$$

Mais cette déviation est celle qui correspond à un milieu extérieur indéfini d'indice k. Comme le liquide est compris entre les deux plans parallèles de la cuve, il y a lieu de corriger l'effet de la réfraction dans l'air; les deux cas les plus simples qui peuvent se présenter sont les suivants :

1° La cuve est fixe; la face d'entrée est normale aux rayons incidents; la déviation apparente D′ sera donnée par l'expression

$$\sin \text{D}' = k \sin \text{D},$$

d'où

$$\text{D}' = 7°24'42'',4.$$

2° Les faces de la cuve sont parallèles au plan bissecteur du prisme et solidaires de son mouvement :

$$\sin \frac{\text{D}''}{2} = k \sin \frac{\text{D}}{2},$$

d'où

$$\text{D}'' = 7°24'10''.$$

C'est à cette dernière disposition qu'on s'est arrêté; l'observation a

(1) On a pu contrôler directement ce nombre par l'observation de la déviation minimum du rayon extraordinaire à travers l'angle aigu; l'image de la fente est inclinée : aussi faut-il incliner le réticule de la lunette sous le même angle et mesurer le double de la déviation; l'observation est difficile à cause du peu d'intensité de la lumière; on a trouvé

$$2\text{A} = 149°52'29'',$$
$$2\text{D} = 170°53'04'',$$

d'où

$$k = 1{,}61982. \quad \text{Différ.} = 0{,}00024.$$

donné pour la déviation constante, dans sept séries bien concordantes,

$$
\begin{array}{rll}
\Delta' = 7^\circ 22' 38'' & \multirow{3}{*}{$\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}\ \theta = 16^\circ,$} & \\
28'' & & \\
27'' & & \\
00'' & & \\
15'' & \theta = 16^\circ,1, & \\
47'' & 17^\circ,7, & \\
45'' & 18^\circ,1. & \\
\hline
\text{Moyenne}\ldots\ 7^\circ 22' 28'' & &
\end{array}
$$

La différence avec le nombre calculé est $1'42''$; elle est de l'ordre des erreurs que les phénomènes de diffraction causés par les stries des faces naturelles de clivage produisent dans l'image de la fente.

57. Il est nécessaire d'ajouter quelques indications sur la manière d'effectuer les mesures; en effet, on arrive assez aisément à amener l'égalité apparente des déviations par l'angle aigu et l'angle obtus du rhomboïde; mais, lorsqu'on exécute les mesures précises, on trouve que cette égalité n'est exacte qu'à quelques minutes près. S'il fallait modifier l'indice jusqu'à l'égalité absolue des déviations, l'opération serait interminable, surtout avec l'évaporation inégale des essences : il était donc nécessaire de déduire le résultat limite des observations obtenues dans le voisinage de l'indice limite. Rien n'est si simple : il suffit de prendre la moyenne des déviations par l'angle obtus et l'angle aigu; c'est ce que justifie, pour les *données spéciales adoptées*, le calcul suivant.

Considérons les déviations minimum par l'angle aigu et l'angle obtus; elles satisfont aux relations

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{k}, \quad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \delta'\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{n_2}{k},$$

dans lesquelles les lettres grecques remplacent les grandes lettres divisées par 2.

La condition pour que $\delta = -\delta' = \Delta$ donne

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{k}, \quad \frac{\cos(\alpha+\delta)}{\cos\alpha} = \frac{n_2}{k},$$

ou, en éliminant k,

$$\operatorname{tang}(\alpha+\delta)=\frac{n_1}{n_2}\operatorname{tang}\alpha,$$

et k est donné par

$$N^2=k^2 n_1 \sin^2\alpha+n_2^2\cos^2\alpha$$

[laquelle est identique avec la relation (K)]. Si k n'a pas la valeur précédente N, δ et $-\delta'$ ne sont pas égaux à Δ, et l'on a

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{n_1\sin\alpha}=\frac{\cos(\alpha-\delta')}{n_2\cos\alpha};$$

comparant avec l'équation (K′),

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin(\alpha+\Delta)}=\frac{\cos(\alpha-\delta')}{\cos(\alpha+\Delta)}.$$

L'observation donne δ et δ'. Posons

$$\begin{aligned}\delta&=\quad\Delta+\varepsilon,\\ \delta'&=-\Delta-\varepsilon'\end{aligned}$$

et calculons

$$\frac{\delta-\delta'}{2}=\Delta+\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2};$$

substituant les valeurs de δ, δ' et développant, il vient, en négligeant les carrés de $\varepsilon, \varepsilon'$,

$$\varepsilon\cot(\alpha+\Delta)=-\varepsilon'\operatorname{tang}(\alpha+\Delta),$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=-\operatorname{tang}^2(\alpha+D).$$

Il se trouve que, *avec les données adoptées*, on a sensiblement

$$\operatorname{tang}(\alpha+\Delta)=1 \quad \text{et} \quad \varepsilon=-\varepsilon',$$

d'où

$$\varepsilon+\varepsilon'=0;$$

en effet,

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{A}{2}=37^\circ 28' \quad (\text{angle aigu}),\\ \Delta&=\frac{D^r}{2}=\ 3^\circ 42'\\ \alpha+\Delta&=\overline{41^\circ 10'} \quad =45^\circ-3^\circ 50'.\end{aligned}$$

Donc la demi-somme des *valeurs absolues* des déviations par l'angle aigu et l'angle obtus donne sensiblement la valeur limite ([1]).

58. Outre ces trois genres de vérifications qui viennent d'être indiqués, le phénomène de la déviation constante du prisme en offre encore un autre sur lequel il est nécessaire d'insister : c'est une particularité assez singulière au premier abord, mais qui est une conséquence évidente des propositions démontrées dans la première partie de ce Mémoire. L'image rectiligne de la fente lumineuse, l'indice du liquide étant bien réglé, tourne autour de son milieu lorsque le prisme tourne autour de son arête; ce *pivotement* de l'image ne laisse pas que de surprendre, la première fois qu'on l'observe; mais, si l'on réfléchit que le milieu seul

---

([1]) Pour effectuer la correction, d'ailleurs très-petite, provenant de ce que la condition $\varepsilon : \varepsilon' = -\operatorname{tang}^2 41°10' = -0,7646$ et non pas zéro, on remarquera qu'il suffit de calculer la valeur $-(\varepsilon + \varepsilon')$, car on a

$$2\Delta = \delta - \delta' - (\varepsilon + \varepsilon');$$

or la somme algébrique $\delta + \delta'$ est égale à $\varepsilon - \varepsilon'$; on connaît donc la différence $\varepsilon - \varepsilon'$ et le rapport $\varepsilon : \varepsilon'$, d'où l'on conclut

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon - \varepsilon'} = -\frac{1 - \operatorname{tang}^2(\alpha + \Delta)}{1 + \operatorname{tang}^2(\alpha + \Delta)} = -\cos 2(\alpha + \Delta) = -0,1334.$$

Le calcul a été appliqué aux quatre dernières séries dans lesquelles on a croisé les observations (pour éliminer l'influence de l'évaporation inégale des essences et l'effet de la température), de façon à obtenir séparément δ et δ'.

RÉFRACTION PAR L'ANGLE		$(\varepsilon - \varepsilon')$.	CORRECTION $-(\varepsilon + \varepsilon')$.	$2\Delta = D''$ corrigé.
aigu $= 2\delta$.	obtus $= 2\delta'$.			
7°.25′.26″	− 7°.18′.34″	+ 206″	+ 27″	7°.22′.27″
25.35	18.54	+ 201	+ 27	42
21.47	23.46	− 60	− 8	39
24.54	20.37	+ 129	+ 17	63
			Moyenne.....	7.22.43

Ce qui réduit à 1′27″ la différence entre le calcul et l'observation.

de l'image correspond au plan de la section droite et que les autres points sont formés par des rayons obliques sur ce plan, on se reportera à l'étude, faite au n° 33, p. 263, de l'image d'une fente rectiligne, et l'on verra que l'image par réfraction doit être inclinée toutes les fois que le point de contact de l'onde plane avec la surface de l'onde est en dehors de la section droite. Dans le cas présent, l'onde, par une rotation continue du prisme autour de son arête, peut occuper toutes les positions du plan tangent du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde; la ligne de contact est une ellipse dont le plan est oblique sur le plan de la section droite (plan diamétral conjugué de la direction de l'arête du prisme).

En deux points seulement la courbe de contact se trouve dans le plan de la section droite, suivant le diamètre équatorial : l'onde est alors parallèle à l'axe optique. Ce sont les deux seuls cas où l'image soit verticale; ils correspondent évidemment au cas où l'angle réfringent est l'angle obtus du rhomboèdre, car le plan bissecteur de l'angle obtus est parallèle à l'axe optique, et l'onde réfractée au minimum de déviation est parallèle à ce plan. Dans tous les autres cas, le point de contact de la surface de l'onde avec l'onde plane est en dehors de la section droite, et l'image est inclinée; cette inclinaison se calcule par la formule (43) du n° 33, p. 263,

$$\operatorname{tang}\varphi'_0 = -\frac{z_0}{x_0 \sin\frac{A}{2} + y_0 \cos\frac{A}{2}} \frac{\sin A}{\cos e'}.$$

On voit que $\operatorname{tang}\varphi'_0$ peut devenir infini, c'est-à-dire que l'image de la fente verticale peut devenir horizontale; il suffit qu'on ait soit

$$x_0 \sin\frac{A}{2} + y_0 \cos\frac{A}{2} = 0,$$

soit

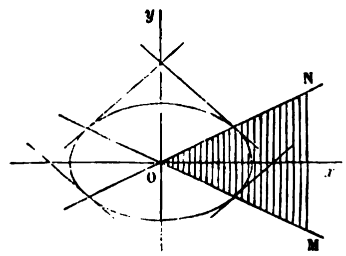
$$\cos e' = 0.$$

La première condition indique que le point de contact de l'onde doit avoir lieu sur la droite

$$\frac{y_0}{x_0} = -\operatorname{tang}\frac{A}{2},$$

c'est-à-dire au point d'intersection de la ligne d'onde avec la trace de l'une des faces du prisme, M, celle sur laquelle on compte les incidences e (*fig.* 21).

Fig. 21.



Il est facile de voir que cette condition revient à $\cos e = 0$ ou $e = 90°$; en effet, l'onde émergente correspondant à l'onde réfractée dans cette position est normale à la face M du prisme, car le cercle, ligne d'onde du milieu extérieur, passe par l'intersection de l'ellipse et des deux droites, traces des faces; c'est l'interprétation géométrique de la condition que l'ellipse $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ soit la ligne d'onde.

Soit, en effet, l'ellipse

$$M^2x^2 + N^2y^2 + 1, \quad \text{identifiée à} \quad \mu^2x^2 + \nu^2y^2 = 1;$$

soit le cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{k^2},$$

l'équation de toute conique passant par l'intersection de ces deux courbes est

$$x^2(M^2 + \lambda) + y^2(N^2 + \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{k^2}.$$

Cette conique devient un système de deux droites concentriques à l'origine; si $\lambda = -k^2$,

$$x^2(M^2 - k^2) + y^2(N^2 - k^2) = 0,$$

d'où

$$\frac{y^2}{x^2} = \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{M^2 - k^2}{k^2 - N^2}.$$

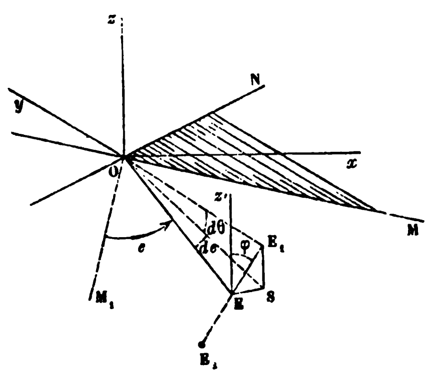
Cette condition est identique à l'équation (K), page 29 : il n'y a de changé que la notation φ substituée à A.

En résumé, l'image sera horizontale pour $e = 90°$, c'est-à-dire quand le rayon incident sera rasant.

La seconde condition $\cos e' = 0$ donne de même $e' = 90°$: elle correspond au rayon émergent rasant.

59. L'expérience donne une vérification qualitative immédiate de ces deux conditions; à mesure que l'image réfractée s'incline vers l'horizontale, son intensité décroit, si bien que, à la limite, lorsqu'elle devrait être tout à fait horizontale, elle est éteinte; c'est qu'en effet, sous l'incidence ou sous l'émergence rasante, la quantité de lumière qui traverse le prisme est nulle.

Fig. 22.



On n'entrera pas dans la discussion qui permet de suivre la rotation simultanée du prisme autour de son arête et de l'image de la fente autour de son centre; on appellera seulement l'attention sur la vérification que présente le sens de l'inclinaison de l'image; d'après la formule (43), p. 263, on voit que φ'_0 est de signe contraire à z_0 (au moment où l'angle aigu donnerait le minimum de déviation); remontant au n° 32, p. 261 et 262, sur le signe conventionnel de φ' (*fig.* 22),

$$\tang\varphi' = -\frac{de'}{d\theta};$$

par suite, tant que l'onde plane réfractée touchera l'ellipsoïde au-

dessus du plan de la section droite, l'image paraîtra avoir tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre et réciproquement. Cette remarque prouve que la déviation, à droite ou à gauche, présente l'image inclinée dans le même sens.

APPENDICE I.

CALCUL DE L'INDICE EXTRAORDINAIRE DU SPATH D'ISLANDE D'APRÈS LES FORMULES DE DE SENARMONT MODIFIÉES.

Les nombreuses séries d'observations effectuées sur le prisme MN, à diverses reprises, ont été discutées au point de vue de la température; l'influence est très-nette, et l'on a pu calculer une formule empirique de correction; la concordance des observations est assez grande pour qu'il ait paru intéressant de faire concourir le résultat moyen de ces observations au calcul de l'indice extraordinaire du spath d'Islande. C'était d'ailleurs une occasion d'appliquer les formules du n° 22 et de contrôler leur exactitude.

Ces formules sont, au fond, celles que de Senarmont a données dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 273; mais la forme sous laquelle elles se présentent est plus commode pour le calcul et la simplicité de la démonstration qui permet de les obtenir assure de leur exactitude.

La moyenne de toutes les mesures effectuées sur l'angle du prisme, la déviation minima ordinaire et la déviation minima extraordinaire, donne

$$2A = 120^\circ 50' 26'',82, \quad \theta = 14^\circ,01, \quad \text{variation } + 6'',00 \text{ pour 1 degré;}$$
$$2D_o = 105^\circ 23' 10'',83, \quad \theta = 14^\circ,32, \quad \text{variation } + 4'',13 \text{ pour 1 degré;}$$
$$2D_e = 86^\circ 52' 16'',57, \quad \theta = 13^\circ,82, \quad \text{variation } + 6'',38 \text{ pour 1 degré.}$$

Un tracé graphique a même permis de déterminer approximativement la variation de chacun de ces angles pour 1 degré, de sorte qu'on

peut les ramener tous à la même température de 15 degrés vrais ($\theta = 15^\circ,50$, car le thermomètre employé était en avance de $0^\circ,50$) :

$$2A = 120^\circ 50' 35'',76,$$
$$2D_o = 105^\circ 23' 15'',70,$$
$$2D_e = 86^\circ 52' 47'',03.$$

L'indice ordinaire se calcule par la formule bien connue des milieux isotropes ; on trouve

$$(\text{raie D}),\quad n_o = \frac{1}{a} = 1,658325;\quad \text{Rudberg}: 1,65850.$$

L'indice extraordinaire $n_e = \frac{1}{b}$ se calcule avec les formules qu'on va établir; l'équation (29) du n° 22, p. 260, peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\mu^2\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}(a'^2\sin^2\sigma + b'^2\cos^2\sigma) - \frac{1}{\nu^2}(a'^2\cos^2\sigma + b'^2\sin^2\sigma) + a'^2b'^2 = 0,$$

a' et b' étant les axes de l'ellipse ligne d'onde dans la section droite du prisme considéré. Dans le cas actuel, on a

$$a'^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega.$$

On se rappelle que σ est l'azimut de la projection de l'axe optique sur la section droite du prisme rapportée à l'axe des x (bissectrice aiguë) et que ω est l'angle aigu que forme cet axe avec le plan de la section droite (*voir* n° 49, p. 23).

$$\sigma = 127^\circ 44' 41'',95,$$
$$\omega = 26^\circ\ 4' 20'',65.$$

Substituant la valeur de a' après avoir posé

$$M = \frac{\cos^2\sigma}{\mu^2} + \frac{\sin^2\sigma}{\nu^2},$$
$$N = \frac{\sin^2\sigma}{\mu^2} + \frac{\cos^2\sigma}{\nu^2},$$

il vient finalement, après réductions, l'équation qui donne b,

$$b^4\sin^2\omega - b^2\left[\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} - (a^2 + N^2)\cos^2\omega\right] + \frac{1}{\mu^2\nu^2} - a^2N\cos^2\omega = 0.$$

Les quantités μ, ν, N se calculent aisément; on connaît d'ailleurs a et ω; l'inconnue b est donc fournie par une équation bicarrée facile à résoudre. En rejetant la racine inadmissible, on trouve

$$(\text{raie D}), \quad n_e = \frac{1}{b} = 1{,}48637; \quad \text{Rudberg}: n_e = 1{,}48635.$$

La concordance est encore plus complète que dans le cas du rayon ordinaire.

APPENDICE II.

INDICES PRINCIPAUX DE L'AZOTATE DE SOUDE.

L'azotate de soude est un sel neutre, incolore, d'une transparence parfaite, cristallisé en rhomboèdres et aussi facilement clivable que le spath d'Islande. Sa biréfringence, mesurée par la différence des deux indices de réfraction, ordinaire et extraordinaire, est environ une fois et demie plus grande que celle du spath et négative comme elle; ce serait donc un cristal éminemment propre aux expériences de double réfraction, s'il n'était pas un peu hygrométrique, de sorte que les faces artificielles se ternissent en quelques minutes à l'air ordinaire; les faces de clivage, souvent très-planes, résistent beaucoup mieux à l'humidité atmosphérique.

Deux séries d'observations ont été faites avec des cristaux de cette substance, la première ayant pour objet la détermination des deux indices; la seconde, la vérification approchée de l'inclinaison de l'image verticale par réfraction extraordinaire.

Première série. — On a utilisé l'arête aiguë du rhomboèdre de clivage d'un très-bel échantillon d'azotate de soude ayant environ 4 centimètres cubes en volume, et d'une limpidité remarquable; le faible pouvoir réfringent du cristal permet aux deux rayons de passer, si bien qu'on peut observer les déviations minima ordinaire et extraordinaire.

L'indice ordinaire se calcule d'après la déviation du rayon correspondant; l'indice extraordinaire se déduit aisément de la déviation minima de l'autre rayon de la manière suivante :

L'axe optique du rhomboèdre se projetant suivant une perpendiculaire à la bissectrice de la section droite, l'onde extraordinaire, au minimum de déviation, se trouve parallèle à cet axe; les formules de la réfraction ordinaire peuvent donc s'appliquer au calcul de l'indice de cette onde.

La connaissance de l'angle du rhomboèdre permet de calculer l'angle que fait cette onde ou plutôt sa normale avec l'axe optique; la formule bien connue

$$\frac{1}{n'^2} = a'^2 = a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega$$

permet de calculer b quand on connait a, a' et ω.

L'observation a donné, pour l'angle aigu A du rhomboèdre et pour les déviations D_o D_e,

	Déviations minima. Ordinaire.	Extraordinaire.
$2A = 137°7'36''$,	$2D_o = 139°7'53''$,	$2D_e = 117°35'41''$;

d'où l'on déduit sans peine

$$\frac{1}{a} = n_o = 1,5852,$$

$$\frac{1}{a'} = n' = 1,52783.$$

L'angle obtus du rhomboèdre R est égal au supplément de la moitié de $2A$

$$R = 106°26'12'',$$

d'où l'on conclut, par un calcul cristallographique déjà indiqué (n° 49, p. 24), l'angle v que fait l'axe du rhomboèdre avec l'arête du prisme

$$\cos v = \cot 60° \cot\frac{R}{2},$$

d'où

$$v = \frac{\pi}{2} - \omega = 64°25'46''.$$

Substituant cette valeur dans la formule qui donne a', on en déduit la valeur de $b = \frac{1}{n_e}$; les résultats définitifs sont (¹) :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Indice ordinaire}\ldots\ldots \frac{1}{a} = n_o = 1{,}5852, \\ \text{Indice extraordinaire}.\ \frac{1}{b} = n_e = 1{,}3348, \end{array}\right\} \text{raie D.}$$

Seconde série. — Elle se rapporte à la mesure de l'inclinaison de l'image extraordinaire de la fente verticale du collimateur. Le mode de mesure à l'aide duquel on l'a mesurée était assez grossier; mais c'était la première fois que l'auteur rencontrait ce phénomène d'une façon si nette, et il avait plutôt en vue une mesure approximative qu'une détermination soignée : cette observation est même l'origine du présent travail.

On a trouvé, pour cette inclinaison,

$$\operatorname{tang}\varphi'_e = 0{,}427, \quad \varphi'_e = 23°8'.$$

Théoriquement on peut calculer cette inclinaison par la formule

$$\operatorname{tang}\varphi'_e = -z_e \frac{\sin(A+D)}{\cos e \cos e'};$$

comme par symétrie $e = e' = \frac{A+D}{2}$, la formule devient

$$\operatorname{tang}\varphi'_e = -2z_e \operatorname{tang}\frac{A+D}{2}.$$

(¹) Une autre série, faite avec un prisme présentant une face de clivage et une face artificielle, a donné, sous l'incidence normale à la face naturelle,

$$A = 32°52'27'', \quad D_o = 26°26'0'', \quad D_e = 19°0'27'',$$

d'où l'on conclut

$$n_o = 1{,}5842,$$
$$n_e = 1{,}3355.$$

Quant à z_0, on le calcule d'après la connaissance de l'angle ω comme au n° 50 :

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\omega, \qquad z_0 = \frac{1}{n'}\operatorname{tang}(\omega - \omega'),$$

d'où

$$\omega - \omega' = 8°26'28'',$$
$$\varphi'_0 = 23°45'00''.$$

La différence entre le calcul et l'observation n'est que de 0° 37', approximation tout à fait en rapport avec le mode d'observation.

DE

L'INTÉGRATION PAR LES SÉRIES

DE L'ÉQUATION $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{n-1}{x}\frac{dy}{dx} = y$;

PAR M. BACH,

DOYEN HONORAIRE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

L'équation différentielle ci-dessus, qui n'est d'ailleurs qu'une transformation bien connue de l'équation de Riccati, a été l'objet de travaux nombreux dont il est inutile de retracer ici l'historique; mais je ne sache pas que les articles récents insérés par M. Cayley et M. Glaisher dans le *Philosophical Magazine* (¹) aient été reproduits dans une publication française; c'est dans ces deux articles que j'ai puisé les éléments de la présente étude.

L'article de M. Glaisher, en particulier, me paraît renfermer des remarques et des rapprochements curieux que je me propose de faire connaître ici, tout en me permettant de changer l'exposition et les notations adoptées par l'auteur.

L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{n-1}{x}\frac{dy}{dx} = y \tag{1}$$

étant linéaire, il suffit d'en connaître deux solutions y_1 et y_2, et alors l'intégrale générale sera

$$y = cy_1 + c'y_2.$$

(¹) *Voir* le *Philosophical Magazine*, numéros de novembre 1869 et juin 1872.

Pour trouver ces deux solutions, posons

$$y = e^x z,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = e^x\left(z + \frac{dz}{dx}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x\left(z + \frac{2\,dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

et, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (1), on aura à vérifier la suivante :

$$(2)\qquad x\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2\,dz}{dx}\right) - (n-1)\left(z + \frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Cela posé, écrivons

$$z = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_i x^i + A_{i+1} x^{i+1} + \ldots.$$

En calculant $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ et substituant dans l'équation (2), qui doit devenir une identité, nous arriverons aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&(n-1)A_1 + (n-1)A = 0,\\
&2(n-2)A_2 + (n-3)A_1 = 0,\\
&3(n-3)A_3 + (n-5)A_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&i(n-i)A_i + (n-2i+1)A_{i-1} = 0,\\
&(i+1)(n-i-1)A_{i+1} + (n-2i-1)A_i = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

d'où, en faisant $A = 1$,

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{1}\,\frac{n-1}{n-1},\\
A_2 &= \frac{1}{1.2}\,\frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)},\\
A_3 &= -\frac{1}{1.2.3}\,\frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_i &= \frac{(-1)^i}{1.2.3.\,i}\,\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2i+1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-i)},\\
A_{i+1} &= \frac{(-1)^{i+1}}{1.2.3.(i+1)}\,\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2i-1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-i-1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Or, si $n = 2i + 1$, A_{i+1} sera nul et il en sera de même pour tous les coefficients suivants.

Nous aurons donc, en ayant égard à la valeur ci-dessus de n,

$$y_1 = e^x \left[1 - \frac{n-1}{n-1} x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)} \frac{x^2}{1.2} - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(n-1)(n-2)\ldots \frac{n+1}{2}} \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{1.2\ldots \frac{(n-1)}{2}} \right].$$

Si l'on pose ensuite $y = e^{-x} z$, et que l'on opère comme plus haut, on trouvera

$$y_2 = e^{-x} \left[1 + \frac{n-1}{n-1} x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)} \frac{x^2}{1.2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(n-1)(n-2)\ldots \frac{n+1}{2}} \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{1.2.3\ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)} \right].$$

L'intégrale générale

$$y = cy_1 + c'y_2$$

sera donc, dans le cas où n est un nombre impair positif, exprimable par des fonctions algébriques et exponentielles.

Dans le cas où n est un nombre négatif et égal à $-(2i+1)$, il est également possible d'exprimer l'intégrale en fonctions algébriques et exponentielles.

A cet effet on posera, après avoir fait $y = e^x z$,

$$z = x^a (A + A_1 x + A_2 x^2 \ldots + A_i x^i + A_{i+1} x^{i+1} + \ldots);$$

calculant ensuite $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{d^2 z}{dx^2}$, on substituera dans l'équation (2), qui après la substitution doit devenir une identité, et l'on arrivera aux re-

lations suivantes :

$$
\begin{aligned}
&(n+1)\,A_1 + (n+1)\,A = 0,\\
&2(n+2)\,A_2 + (n+3)\,A_1 = 0,\\
&3(n+3)\,A_3 + (n+5)\,A_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&i(n+i)\,A_i + (n+2i-1)\,A_{i-1} = 0,\\
&(i+1)(n+i+1)\,A_{i+1} + (n+2i+1)\,A_i = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;
\end{aligned}
$$

d'où, en faisant $A = 1$,

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{1}\,\frac{n+1}{n+1},\\
A_2 &= \frac{1}{1.2}\,\frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)},\\
A_3 &= -\frac{1}{1.2.3}\,\frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
A_i &= \frac{(-i)^i}{1.2.3\dots i}\,\frac{(n+1)(n+3)\dots(n+2i-1)}{(n+1)(n+2)\dots n+i},\\
A_{i+1} &= \frac{(-1)^{i+1}}{1.2.3\dots(i+1)}\,\frac{(n+1)(n+3)\dots(n+2i+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+i+1)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Si $n = -(2i+1)$, A_{i+1} est nul, et il en sera de même pour tous les coefficients suivants.

Nous aurons donc, en ayant égard à la valeur ci-dessus de n, une première intégrale particulière,

$$
\begin{aligned}
y_3 = x^n e^x \Bigg[& 1 - \frac{n+1}{n+1}x + \frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\,\frac{x^2}{1.2} + \dots\\
& + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\,\frac{(n+1)(n+3)\dots(-2)}{(n+1)(n+2)\dots\frac{(n-1)}{2}}\,\frac{x^{\frac{-(n+1)}{2}}}{1.2.3\dots\frac{(-n-1)}{2}}\Bigg].
\end{aligned}
$$

On trouvera de même une seconde solution,

$$y_4 = x^n e^{-x}\left[1 + \frac{n+1}{n+1}x + \frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{x^2}{2.1} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)(n+3)\dots(-2)}{(n+1)(n+2)\dots\frac{(n-1)}{2}}\,\frac{x^{\frac{-(n+1)}{2}}}{1.2.3\dots\frac{(-n-1)}{2}}\right].$$

Il ne faut pas perdre de vue que n doit dans ces formules être remplacé par un nombre impair *négatif*.

L'intégrale générale sera, dans ce cas,

$$y = cy_3 + c'y_4.$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que n était un nombre impair positif ou négatif; mais la même analyse s'applique évidemment au cas où n est quelconque, pourvu qu'il ne soit pas un nombre pair positif ou négatif. On posera, comme plus haut,

$$y = e^x z$$

avec

$$z = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots,$$

z n'étant plus ici un polynôme composé d'un nombre limité de termes, mais bien une série illimitée dont la loi de formation est évidente; on trouve ainsi

$$Y_1 = e^x\left[1 - \frac{n-1}{n-1}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)}\frac{x^2}{1.2} - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{x^3}{1.2.3} + \dots\right]$$

et de même

$$Y_2 = e^{-x}\left[1 + \frac{n-1}{n-1}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)}\frac{x^2}{1.2} + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{x^3}{1.2.3} + \dots\right].$$

Posant ensuite

$$z = x^n(A + A_1 x + A_2 x^2 + \dots),$$

on obtiendra

$$Y_3 = x^n e^x \left[1 - \frac{n+1}{n+1}x + \frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{x^2}{1.2} - \frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right],$$

$$Y_4 = x^n e^{-x}\left[1 + \frac{n+1}{n+1}x + \frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

De là, en apparence du moins, quatre intégrales particulières de l'équation (2); il est à remarquer d'ailleurs que ces intégrales Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, qui représentent des séries indéfiniment prolongées, conviennent, quand bien même n serait un nombre impair positif ou négatif. Il suffira d'avoir la précaution de faire disparaître préalablement, dans les différents termes de ces séries, les facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs qui, en s'évanouissant, font prendre aux coefficients de ces termes, à partir du rang $\pm n + 1$, des valeurs illusoires.

Les solutions particulières Y_1 et Y_2, qui conviennent à tous les cas, sont données par des séries illimitées et évidemment convergentes; mais si les solutions y_1 et y_2, qui conviennent au cas spécial où n est un impair positif, sont essentiellement différentes, il n'en est pas de même des solutions Y_1 et Y_2, qui sont égales entre elles, ainsi que nous allons le démontrer.

Le terme général de l'expression que l'on obtient en développant Y_1 en série ordonnée, suivant les puissances ascendantes de n, par la formule de Maclaurin, est

$$\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\left(\frac{d^p Y_1}{dx^p}\right),$$

et, puisque

$$Y_1 = e^x z,$$

$$\frac{d^p Y_1}{dx^p} = e^x\left[z + p\frac{dz}{dx} + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\frac{d^3 z}{dx^3} + \ldots + \frac{d^p z}{dx^p}\right].$$

En se reportant à la valeur

$$z = 1 - \frac{n-1}{n-1}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)}\frac{x^2}{1.2} - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

on trouvera, après un calcul des plus simples,

$$\left(\frac{d^pY_1}{dx^p}\right)_0 = (-1)^p\left[1 - \frac{p(n-1)}{n-1} + \frac{p(p-1)}{1.2.3}\frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)} + \ldots \pm \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\right].$$

Le coefficient de x^p est donc

$$(-1)^p\left[\frac{1}{1.2.3\ldots p} - \frac{1}{1}\frac{n-1}{n-1}\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)} + \frac{1}{1.2}\frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)}\frac{1}{1.2.3\ldots(p-2)} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots p}\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\right],$$

ou encore

$$\frac{(-1)^p}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots p} - \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-1)}\frac{n-1}{1} + \frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-2)}\frac{(n-1)(n-3)}{1.2}\ldots \pm \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots p}\right].$$

La quantité, entre crochets, que nous désignerons par C_p, peut encore être écrite

$$C_p = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots p} - \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-1)}\frac{\frac{n-1}{2}}{1}2 + \frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-2)}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{1.2}2^2 - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{n-1}{2}-p+1\right)}{1.2.3\ldots p}2^p.$$

Cela posé, considérons l'expression

$$\left(1-\frac{1+u}{2u}\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Cette expression, développée par la formule du binôme, donne

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2u}{1+u}\right)^{\frac{n-1}{2}}=1-\frac{2u}{1+u}\,\frac{n-1}{2}+\frac{2^2u^2}{(1+u)^2}\,&\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{1.2}\\ -\frac{2^3u^3}{(1+u)^3}\,&\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)}{1.2.3}+\ldots\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(1+u)^{n-1}\left(1-\frac{2u}{1+u}\right)^{\frac{n-1}{2}}=(1+u)^{n-1}&-2u(1+u)^{n-2}\frac{\frac{n-1}{2}}{1}\\ &+2^2u^2(1+u)^{n-3}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{1.2}\\ &-2^3u^3(1+u)^{n-4}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)}{1.2.3}+\ldots.\end{aligned}$$

Formons le terme en u^p de ce développement. Ce terme général sera

$$\begin{aligned}u^p\Bigg[&\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots p}-\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-1)}\,\frac{n-1}{2}\,2\\ &+\frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-2)}\,\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)2^2}{1.2}\\ &+\frac{(n-4)(n-5)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-3)}\,\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)2^3}{1.2.3\ldots}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\pm\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n-1}{2}p+1\right)2^p}{1.2.3\ldots p}\Bigg],\end{aligned}$$

ou $C_p\,u^p$.

Mais $C_p\, u^p$ est le terme général du développement en série de

$$(1+u)^{n-1}\left(1-\frac{2u}{1+u}\right)^{\frac{n-1}{2}}=(1+u)^{n-1}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\frac{n-1}{2}}=(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Or le développement d'une pareille expression ne renferme que les puissances paires de u et, en supposant p un nombre pair, on aura

$$C_p=\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{n-1}{2}-\frac{p}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{p}{2}}.$$

Le coefficient de x^p sera donc finalement

$$\frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\;\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{n-1}{2}-\frac{p}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{p}{2}},$$

ou encore

$$\frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{2.4.6\ldots p}\;\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots(n-2p+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p)},$$

et, donnant à p successivement les valeurs de $2.4.6\ldots$, nous trouverons les coefficients des puissances paires de x, et par suite

$$Y_1=1-\frac{1}{n-2}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{(n-2)(n-4)}\frac{1}{1.2}\frac{x^4}{2^2}-\frac{1}{(n-2)(n-4)(n-6)}\frac{1}{1.2.3}\frac{x^6}{2^3}+\ldots,$$

série convergente pour toutes les valeurs de x, et qui ne contient que les puissances paires de cette quantité; mais Y_2 se déduit de Y_1 par le changement de x en $-x$: il en résulte donc que $Y_2=Y_1$.

En suivant la même marche que plus haut, on trouvera

$$\begin{aligned}Y_3=Y_4=x^n\Bigg[1&+\frac{1}{n+2}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{(n+2)(n+4)}\frac{1}{1.2}\frac{x^4}{2^2}\\&+\frac{1}{(n+2)(n+4)(n+6)}\frac{1}{1.2.3}\frac{x^6}{2^3}+\ldots\Bigg]\end{aligned}\ (^1).$$

(1) Il est à remarquer toutefois que la valeur de Y_4 ne dérive pas de celle de Y_3 par le changement de x en $-x$.

Avant d'aller plus loin, nous ferons d'ailleurs observer que ces valeurs de Y_1 et de Y_2 sont précisément celles que l'on obtient quand on développe les solutions de l'équation (1) en séries de la forme

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots$$

En effet, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \delta Dx^{\delta-1} + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)Bx^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1)Cx^{\gamma-2} + \delta(\delta-1)Dx^{\delta-2} + \ldots$$

et, substituant dans l'équation (1), il vient

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha-n)Ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-n)Bx^{\beta-2} + \gamma(\gamma-n)Cx^{\gamma-2} + \delta(\delta-n)Dx^{\delta-2} + \ldots \\ - Ax^\alpha - Bx^\beta - Cx^\gamma - \ldots\ldots\ldots\ldots = 0.\end{aligned}$$

Faisons d'abord

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 6;$$

les conditions d'identité seront

$$\begin{aligned} A + 2B(n-2) &= 0, \\ B + 4C(n-4) &= 0, \\ C + 6D(n-6) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &, \end{aligned}$$

et, en faisant $A = 1$,

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{n-2}\frac{1}{2}, \\ C &= \frac{1}{(n-2)(n-4)}\frac{1}{2.4}, \\ D &= -\frac{1}{(n-2)(n-4)(n-6)}\frac{1}{2.4.6}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} y = 1 - \frac{1}{n-2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{(n-2)(n-4)}\frac{1}{1.2}\frac{x^4}{2^2} \\ - \frac{1}{(n-2)(n-4)(n-6)}\frac{1}{1.2.3}\frac{x^6}{2^3} + \ldots = Y_1.\end{aligned}$$

Faisant ensuite

$$\alpha = n,\quad \beta = n+2,\quad \gamma = n+4,\quad \delta = n+6\ldots,$$

les conditions d'identité seront

$$\begin{aligned}
&A - 2(n+2)B = 0,\\
&B - 4(n+4)C = 0,\\
&C - 6(n+6)D = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et, prenant $A = 1$,

$$\begin{aligned}
&B = \frac{1}{(n+2)}\frac{1}{2},\\
&C = \frac{1}{(n+2)(n+4)}\frac{1}{2.4},\\
&D = \frac{1}{(n+2)(n+4)(n+6)}\frac{1}{2.4.6},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
y = x^n\Bigg[1 &+ \frac{1}{(n+2)}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{(n+2)(n+4)}\frac{1}{1.2}\frac{x^4}{2^2}\\
&+ \frac{1}{(n+2)(n+4)(n+6)}\frac{1}{1.2.3}\frac{x^6}{2^3} + \ldots\Bigg] = Y_2.
\end{aligned}$$

Puisque Y_1 et Y_2 sont deux solutions de l'équation (1), l'intégrale générale de cette équation sera

$$y = CY_1 + C'Y_2.$$

Cette intégrale convient encore quand n est un nombre impair, positif ou négatif. Or nous avons trouvé, dans le cas de n impair positif,

$$y = cy_1 + c'y_2.$$

Nous allons montrer que cette intégrale *rentre dans le type*

$$Y = CY_1 + C'Y_2.$$

Considérons, en effet, la série donnant la valeur de Y_1 ; on peut l'écrire

$$Y_1 = y_1 + V e^x,$$

V désignant le résultat que l'on obtient en faisant $p = n$ dans la suite

$$-\left[\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots(n-2p+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\right.$$
$$-\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p-1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p-1)}\frac{x^{p+1}}{1.2.3\ldots(p+1)}$$
$$\left.+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p-3)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p-2)}\frac{x^{p+2}}{1.2.3\ldots(p+2)}-\ldots\right]$$

et en se rappelant que p, que nous allons faire égal à n, est essentiellement impair.

Après la suppression des facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs, l'expression devient

$$-\left[\frac{(n-p-2)(n-p-4)\ldots(n-2p+1)}{(n-2)(n-4)\ldots(n-p+1)}\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\right.$$
$$-\frac{(n-p-2)(n-p-4)\ldots(n-2p-1)}{(n-2)(n-4)\ldots(n-p-1)}\frac{x^{p+1}}{1.2.3\ldots(p+1)}$$
$$+\frac{(n-p-4)\ldots(n-2p-3)}{(n-2)(n-4)\ldots(n-p-1)}\frac{x^{p+2}}{1.2.3\ldots(p+2)}$$
$$\left.-\frac{(n-p-4)\ldots(n-2p-5)}{(n-2)(n-4)\ldots(n-p-3)}\frac{x^{p+3}}{1.2.3\ldots(p+3)}+\ldots\right],$$

et, si nous faisons actuellement $p = n$, on aura

$$-\left[\frac{(-2)(-4)(-6)\ldots(-n+1)}{1.3.5\ldots(n-2)}\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\right.$$
$$-\frac{(-2)(-4)\ldots(-n+1)}{1.3.5\ldots(n-2)}\frac{(-n-1)}{(-1)}\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$$
$$+\frac{(-4)(-6)(-n+1)}{1.3.5\ldots(n-2)}\frac{(-n-1)(-n-3)}{(-1)}\frac{x^{n+2}}{1.2.3\ldots(n+2)}$$
$$\left.-\frac{(-4)(-6)(-n+1)}{1.3.5\ldots(n-2)}\frac{(-n-1)(-n-3)(-n-5)}{(-1)(-3)}\frac{x^{n+3}}{1.2.3\ldots(n+3)}+\ldots\right],$$

ce qui peut s'écrire

$$-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2.4.6\ldots(n-1)}{1.3.5\ldots(n-2)}\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\left[1-\frac{n+1}{n+1}\frac{x}{1}+\frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{x^2}{1.2}\right.$$
$$\left.-\frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\right],$$

ou bien encore

$$-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{(1.3.5\ldots n)^2}x^n\left[1-\frac{n+1}{n+1}x+\frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{x^2}{1.2}-\ldots\right];$$

et si nous posons

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{(1.3.5\ldots n)^2}=\mathrm{A},$$

nous aurons

$$\mathrm{V}e^x=-\mathrm{A}\mathrm{Y}_3$$

et par suite

$$\mathrm{Y}_1=y_1-\mathrm{A}\mathrm{Y}_3.$$

En répétant identiquement les mêmes calculs sur la série qui donne Y_2, nous trouverons

$$\mathrm{Y}_2=y_2+\mathrm{A}\mathrm{Y}_4,$$

et puisque

$$\mathrm{Y}_1=\mathrm{Y}_2,\quad \mathrm{Y}_3=\mathrm{Y}_4,$$

il vient

$$\mathrm{Y}_3=\frac{y_1-y_2}{2\mathrm{A}}\quad\text{et}\quad \mathrm{Y}_1=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

La solution

$$y=\mathrm{C}_1\mathrm{Y}_1+\mathrm{C}'\mathrm{Y}_3$$

devient, par conséquent,

$$y=\frac{\mathrm{C}_1}{2}(y_1+y_2)+\frac{\mathrm{C}'}{2\mathrm{A}}(y_1-y_2)=cy_1+c'y_2.$$

Si n est impair négatif, la même analyse est applicable, et l'on aura

$$\mathrm{Y}_3=y_3-\mathrm{A}\mathrm{Y}_1,$$
$$\mathrm{Y}_4=y_4+\mathrm{A}\mathrm{Y}_1;$$

la solution

$$y = C_1 Y_1 + C' Y_2$$

deviendra, par conséquent,

$$y = c y_3 + c' y_4.$$

M. Glaisher donne aussi les valeurs de y_1 et y_2 développées en séries illimitées en s'appuyant sur les formules

$$y_1 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{1.3.5\ldots(n-2)} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e^x}{x}, \tag{3}$$

$$y_2 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{1.3.5\ldots(n-2)} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right) \frac{e}{x}, \tag{4}$$

qu'il a démontrées dans le *Quarterly Journal of Mathematik*. On peut les établir comme il suit : les égalités ci-dessous font d'ailleurs suffisamment comprendre la notation

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^1 \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x} = e^x(x^{-2} - x^{-3}),$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2 \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x} = e^x(x^{-3} - 3x^{-4} + 3x^{-5}),$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^3 \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x} = e^x(x^{-4} - 6x^{-5} + 15x^{-6} - 15x^{-7}).$$

Faisant successivement $n = 3, 5, 7$ dans la formule (3) et ayant égard aux relations écrites ci-dessus, nous trouvons

$$\frac{(-1)^1}{1} x^3 \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^1 \frac{e^x}{x} = e^x(1 - x),$$

$$\frac{(-1)^2}{1.3} x^5 \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2 \frac{e^x}{x} = e^x\left(1 - x + \frac{2}{3}\frac{x^2}{1.2}\right),$$

$$\frac{(-1)^3}{1.3.5} x^7 \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^3 \frac{e^x}{x} = e^x\left(1 - x + \frac{4}{5}\frac{x^2}{1.2} + \frac{2}{5}\frac{x^3}{1.2.3}\right).$$

Les seconds membres de ces égalités peuvent encore être écrits

$$e^x\left(1-\frac{3-1}{3-1}x\right),$$

$$e^x\left[1-\frac{(5-1)}{(5-1)}x+\frac{(5-1)(5-3)}{(5-1)(5-2)}\frac{x^2}{1.2}\right],$$

$$e^x\left[1-\frac{7-1}{7-1}x+\frac{(7-1)(7-3)}{(7-1)(7-2)}\frac{x^2}{1.2}-\frac{(7-1)(7-3)(7-5)}{(7-1)(7-2)(7-3)}\frac{x^3}{1.2.3}\right];$$

nous reconnaissons les valeurs de y_1 répondant aux valeurs de 3, 5, 7, attribuées à n. Il s'agit de montrer que la formule (3) est vraie pour toutes les valeurs impaires de n : nous avons

$$y_1=e^x\left[1-\frac{n-1}{n-1}x-\ldots\pm\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(n-1)(n-2)\ldots\frac{n+1}{2}}\frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{1.2.3\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right],$$

et, si la formule (3) est exacte pour la valeur de n considérée, nous aurons, en désignant la valeur du développement par $U_{\frac{n-1}{2}}$,

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{e^x}{x}=U_{\frac{n-1}{2}}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}1.3.5(n-2)y_1x^{-n}.$$

Quant au terme général de ce développement, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}[1.3.5\ldots(n-2)]e^xB_px^{-n+p}$$

avec

$$B_p=(-1)^p\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\frac{1}{1.2.3\ldots p}.$$

Le terme général de

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\frac{n+1}{2}}\frac{e^x}{x}\quad\text{ou de}\quad U_{\frac{n+1}{2}},$$

c'est-à-dire celui qui en a p avant lui, contiendra x à la puissance $-n+p-2$, et s'obtiendra comme il suit.

Considérons l'ensemble de deux termes consécutifs de $U_{\frac{n-1}{2}}$, savoir:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}[1.3.5\ldots(n-2)](B_{p-1}x^{-n+p-1}+B_p x^{-n+p}).$$

Prenons la dérivée par rapport à x et divisons le résultat par x, nous trouverons pour le coefficient du terme général, ou de celui qui en a p avant lui,

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}}[1.3.5\ldots(n-2)]e^x[-B_{p-1}+(n-p)B_p],$$

et remplaçant B_{p-1} et B_p par leurs valeurs

$$(-1)^p(-1)^{\frac{n+1}{2}}[1.3.5\ldots(n-2)]e^x\left[\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+3)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)(n-p)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)}\frac{1}{1.2\ldots p}\right].$$

La quantité entre parenthèses se réduit à

$$\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+3)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-2p+1)}\left(1+\frac{n-2p+1}{p}\right)\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}$$
$$=\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+3)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)}\frac{1}{1.2.3\ldots p}$$
$$=\frac{n(n+1)(n-1)\ldots(n-2p+3)}{n(n+1)(n-1)\ldots n-p+2}\frac{1}{1.2.3\ldots p};$$

le terme général de $U_{\frac{n+1}{2}}$ sera donc de la forme

$$(-1)^p(-1)^{\frac{n+1}{2}}[1.3.5\ldots(n-2)]ne^x\frac{(n+1)(n-1)\ldots(n-2p+3)}{(n+1)n(n-1)\ldots n-p+2}\frac{1}{1.2.3\ldots p},$$

qui se déduit de $U_{\frac{n-1}{2}}$ par le changement de n en $n+2$. L'égalité (3) est donc vraie pour toutes les valeurs impaires de n, puisqu'elle a été vérifiée pour les valeurs 3, 5, 7....

La formule qui donne y_2 s'établirait absolument de la même manière.

Nous allons actuellement former la valeur de y_1 en nous appuyant

sur la relation (3) qui vient d'être démontrée; mais nous simplifierons considérablement les calculs au moyen de la remarque suivante :

Si, dans l'expression $\frac{e^x}{x}$, nous faisons $x^2 = t$, il vient

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$$

et, différentiant par rapport à t,

$$\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}.$$

Puisque, en vertu de la relation $x^2 = t$, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2x},$$

il vient

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x} = 2\frac{d}{dt}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}.$$

Différentiant une seconde fois par rapport à t, nous avons

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x}\frac{dx}{dt} = 2\frac{d^2}{dt^2}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}};$$

remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par sa valeur, on arrive, en employant la notation ci-dessus, à la relation

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2\frac{e^x}{x} = 2^2\frac{d^2}{dt^2}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$$

et, en continuant ainsi,

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^3\frac{e^x}{x} = 2^3\frac{d^3}{dt^3}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{e^x}{x} = 2^{\frac{n-1}{2}}\frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{dt^{\frac{n-1}{2}}}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}.$$

Cette transformation établie, écrivons le développement de

$$\frac{e^{t^{\frac{1}{2}}}}{t^{\frac{1}{2}}} = t^{-\frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{1.2} t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{1.2.3} t + \frac{1}{1.2.3.4} t^{\frac{3}{2}} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots 2p} t^{p-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)} t^p + \ldots,$$

et prenons les dérivées de l'ordre $\frac{n-1}{2}$ de chacun des termes $t^{p-\frac{1}{2}}$, t^p.

La dérivée du premier est

$$\frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{3}{2}\right)\left(p-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(p-\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots 2p} t^{p-\frac{n}{2}}$$
$$= \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots(2p-n+2)}{1.2.3\ldots 2p} \frac{t^{p-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Si nous faisons successivement

$$p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots \frac{n-1}{2},\quad \frac{n+1}{2},\quad \frac{n+3}{2},\ldots,$$

nous trouverons

pour $p = 0$, $\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5\ldots(n-2)}{1} \frac{t^{-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}}$,

pour $p = 1$, $\quad -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \times 1.3.5\ldots(n-4)}{1.2} \frac{t^{1-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}}$,

pour $p = 2$, $\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3 \times 1.3\ldots(n-6)}{1.2.3.4} \frac{t^{2-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}}$,

pour $p = 3$, $\quad -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5 \times 1.3\ldots(n-8)}{1.2.3.4.5.6} \frac{t^{3-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}}$,

. . . .

$$\text{pour } p=\frac{n-1}{2},\qquad \frac{(n-2)(n-4)\ldots3.1}{1.2.3.4\ldots(n-1)}\,\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$

$$\text{pour } p=\frac{n+1}{2},\qquad \frac{n(n-2)(n-4)\ldots3}{1.2.3.4\ldots(n+1)}\,\frac{t^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$

$$\text{pour } p=\frac{n+3}{2},\qquad \frac{(n+2)n(n-2)\ldots5}{1.2.3\ldots(n+3)}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La dérivée de l'ordre $\frac{n-1}{2}$ du terme t^p est

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\left(p-\frac{n-1}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots2p+1}\,t^{p-\frac{n-1}{2}}$$
$$=\frac{2p(2p-2)(2p-4)\ldots(2p-n+3)}{1.2.3\ldots(2p+1)}\,t^{p-\frac{n-1}{2}},$$

et si l'on fait successivement

$$p=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots\frac{n-3}{2},$$

l'expression s'annulera, et nous n'aurons de termes à considérer qu'à partir de $p=\frac{n-1}{2}$.

$$\text{pour } p=\frac{n-1}{2},\quad \text{on a}\quad \frac{(n-1)(n-3)\ldots2}{1.2.3\ldots n}\,t^0,$$

$$\text{pour } p=\frac{n+1}{2},\quad \text{on a}\quad \frac{(n+1)(n-1)\ldots4}{1.2.3\ldots(n+2)}\,t,$$

$$\text{pour } p=\frac{n+3}{2},\quad \text{on a}\quad \frac{(n+3)(n+1)(n-1)\ldots6}{1.2.3\ldots(n+4)}\,t^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela posé, il est facile de former la valeur de y_1 en nous reportant à

la formule (3) et en faisant $t = x^2$; on obtient, après une réduction facile,

$$
\begin{aligned}
y_1 = 1 &- \frac{1}{n-2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{(n-2)(n-4)}\frac{x^4}{2^2}\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n-2)(n-4)(n-6)}\frac{x^6}{2^3}\frac{1}{1.2.3} \\
&\pm \frac{1}{(n-2)(n-4)\ldots 3.1}\frac{x^{n-1}}{2^{\frac{n-1}{2}}}\frac{1}{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}} \\
&\mp \frac{1}{(n-2)(n-4)\ldots 3.1(-1)}\frac{x^{n+1}}{2^{\frac{n+1}{2}}}\frac{1}{1.2.3\ldots\frac{n+1}{2}} + \ldots \\
&+ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n\, x^n}{(1.3.5\ldots n)^2}\left[1 + \frac{1}{n+1}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{x^4}{2^2}\frac{1}{1.2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\frac{x^6}{2^3}\frac{1}{1.2.3} + \ldots\right].
\end{aligned}
$$

La première partie du deuxième membre de l'égalité ci-dessus est Y_1; la seconde est Y_3 multiplié par un coefficient que nous avons déjà rencontré plus haut et que nous avons désigné par A. Il vient par conséquent

$$y_1 = Y_1 + AY_3$$

et de même

$$y_2 = Y_1 - AY_3,$$

ce qui est conforme aux résultats trouvés plus haut.

Nous venons de considérer le cas où n est un nombre impair positif; s'il était impair négatif, on partirait des valeurs de y_3 et de y_4 que l'on établirait facilement, comme il a été fait ci-dessus. Ces valeurs sont

$$y_3 = \frac{(-1)^{-\frac{(n+1)}{2}}}{1.3.5\ldots(-n-2)}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}\frac{e^x}{x},$$

$$y_4 = \frac{(-1)^{-\frac{(n+1)}{2}}}{1.3.5\ldots(-n-2)}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}\frac{e^{-x}}{x},$$

formules dans lesquelles n doit être remplacé par un nombre impair

négatif, et l'on arriverait aux relations

$$y_3 = Y_2 + AY_1,$$
$$y_4 = Y_2 - AY_1,$$

ce qui est également conforme aux résultats trouvés plus haut.

De l'équation de Riccati.

L'équation de Riccati est, comme on sait, de la forme

$$\frac{dz}{dt} + z^2 = t^{2q-2};$$

en posant

$$z = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt},$$

elle se transforme en

$$(5) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = yt^{2q-2}.$$

Si nous faisons actuellement

$$q = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x = nt^{\frac{1}{n}},$$

nous aurons

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}t^{\frac{1}{n}-1},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}t^{\frac{2}{n}-2} + \left(\frac{1}{n} - 1\right)\frac{dy}{dx}t^{\frac{1}{n}-2}.$$

Dès lors l'équation (5) devient, après une réduction facile,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{n-1}{x}\frac{dy}{dx} = y.$$

Elle admet les solutions y_1, y_2, exprimables en fonctions algébriques et exponentielles dans le cas où n est un nombre impair positif, et les solutions y_3 et y_4 quand n est un nombre impair négatif.

Dès lors l'équation (5) admettra les solutions

$$y_1 = e^{\frac{t^q}{q}} \left[1 - \frac{q-1}{q(q-1)} t^q + \frac{(q-1)(3q-1)}{q(q-1)(2q)(2q-1)} t^{2q} \right.$$
$$\left. - \frac{(q-1)(3q-1)(5q-1)}{q(q-1)\,2q\,(2q-1)(3q)(3q-1)} t^{3q} - \ldots \right],$$

$$y_2 = e^{-\frac{t^q}{q}} \left[1 + \frac{(q-1)}{q(q-1)} + \frac{(q-1)(3q-1)}{q(q-1)(2q)(2q-1)} t^{2q} - \ldots \right],$$

expressions qui sont terminées quand q est de la forme $\frac{1}{2i+1}$, i étant supposé entier positif. Elle admettra les solutions

$$y_3 = e^{\frac{t^q}{q}} t \left[1 - \frac{q+1}{q(q+1)} t^q + \frac{(q+1)(3q+1)}{q(q+1)(2q)(2q+1)} t^{2q} - \ldots \right],$$
$$y_4 = e^{-\frac{t^q}{q}} t \left[1 + \frac{q+1}{q(q+1)} t^q + \frac{(q+1)(3q+1)}{q(q+1)(2q)(2q+1)} t^{2q} + \ldots \right],$$

lesquelles seront également des expressions terminées si $q = -\frac{1}{2i+1}$. Telles sont les formules données par M. Cayley dans le *Philosophical Magazine* de novembre 1868.

Quant à l'intégrale de l'équation de Riccati, on l'obtient facilement; elle est en effet

$$z = \frac{c\frac{dy_1}{dt} + c'\frac{dy_2}{dt}}{cy_1 + c'y_2} = \frac{\frac{dy_1}{dt} + C\frac{dy_2}{dt}}{y_1 + Cy_2},$$

expression qui ne renferme qu'une seule constante arbitraire.

THÉORIE

DES

PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES

OBSERVÉS

AU CONTACT DE DEUX LIQUIDES,

PAR M. J. MOUTIER.

Deux théories bien distinctes ont été proposées pour expliquer les phénomènes capillaires. Dans la première, on admet que les liquides sont enveloppés d'une sorte de membrane élastique, qui offre une tension constante en tous les points de sa surface. C'est en suivant cet ordre d'idées que Young a obtenu pour la première fois l'équation de la surface capillaire; depuis de nombreux travaux ont remis en lumière la notion de la tension superficielle des liquides, des expériences intéressantes ont été imaginées pour démontrer l'existence de cette tension superficielle.

La théorie de Laplace fait dépendre les phénomènes capillaires de l'existence de forces qui varient avec la distance, suivant une loi inconnue, et deviennent insensibles à une distance sensible. Les résultats obtenus par Laplace ont été retrouvés par Gauss au moyen d'une méthode plus directe, qui fait disparaître plusieurs objections élevées contre les raisonnements de Laplace. La méthode de Gauss, on le sait, consiste à exprimer que la somme des travaux virtuels de toutes les forces qui sollicitent le système en équilibre est nulle. Cette somme est la variation totale d'une fonction Ω, laquelle, pour l'équilibre, doit

être un maximum. La recherche de ce maximum a été considérablement simplifiée par M. Bertrand (1) au moyen de considérations géométriques, qui rendent facile l'application de la théorie de Gauss.

J'ai montré, dans un autre travail (2), que cette théorie rend aisément compte des expériences sur lesquelles on a cru devoir fonder l'existence de la tension superficielle des liquides; toutefois une objection grave, si elle est exacte, a été soulevée contre la théorie de Gauss.

« Si à la surface du ménisque, dans le tube capillaire, on fait arriver une petite quantité d'un autre liquide, celui-ci se substitue quelquefois au liquide inférieur, mouille le tube à sa place et forme un nouveau ménisque capable de soutenir un poids déterminé. De là une variation dans la hauteur du liquide soulevé. C'est ce qu'ont vu Young, en faisant arriver un peu d'huile dans le tube capillaire, et Quincke, dans le cas de l'alcool et de l'eau, ou de l'essence de térébenthine et de l'huile d'olive. Dans ces deux derniers cas, les liquides employés étant miscibles l'un à l'autre, il n'y a pas, comme dans l'expérience de Young, deux ménisques superposés; il n'y en a qu'un qui est celui du liquide supérieur, et le poids du liquide soulevé est exactement celui que comporte la tension superficielle de ce liquide (3).

» La théorie de Gauss conduit à admettre que, si plusieurs liquides sont superposés dans un même tube capillaire, la somme des poids des liquides soulevés ne dépend que de la nature du tube et de celle du liquide inférieur. Elle est donc, au moins sur ce point, en contradiction avec l'expérience (4). »

J'ai été conduit, d'après cela, à reprendre l'étude des liquides superposés dans un tube capillaire. Ce Mémoire est divisé en trois parties : j'indiquerai d'abord une méthode rapide pour former la fonction Ω, j'examinerai ensuite les liquides superposés dans un tube capillaire et, enfin, je chercherai l'explication de certains phénomènes observés au contact de deux liquides.

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, p. 185.
(2) *Journal de Physique théorique et appliquée*, t. I, p. 98; t. II, p. 27.
(3) Duclaux, *Théorie élémentaire de la capillarité*, p. 9.
(4) *Loc. cit.*, p. 3.

I. Considérons un liquide contenu dans un vase dont la forme est d'ailleurs laissée arbitraire. Désignons par m, m',... les masses des divers éléments du liquide, par M, M',... les masses des divers éléments de la paroi, par z la distance de l'élément liquide m à un plan horizontal arbitraire situé au-dessous du liquide. La force attractive qui agit entre deux éléments liquides m, m', situés à la distance r, peut se représenter par $mm'f(r)$; la force attractive qui agit entre l'élément liquide m et l'élément de paroi M, situés à la distance R, peut se représenter par $m\mathrm{M}\,\mathrm{F}(\mathrm{R})$.

Supposons que le liquide éprouve un changement quelconque et estimons la somme des travaux virtuels relatifs au déplacement de l'élément liquide m :

1° Si l'on appelle $z+dz$ la nouvelle ordonnée de l'élément m, g l'accélération due à la pesanteur, le travail virtuel de la pesanteur est $-mg\,dz$.

2° La distance de l'élément m à l'élément m' devient $r+dr$, la force attractive qui agit entre ces deux éléments effectue un travail $-mm'f(r)\,dr$. La somme des travaux virtuels qui proviennent des attractions du liquide sur l'élément m est la somme des quantités analogues, étendue à tout le liquide.

3° La distance de l'élément liquide m à l'élément de paroi M devient $\mathrm{R}+d\mathrm{R}$; la force attractive, qui agit entre ces deux éléments, effectue un travail $-m\mathrm{M}\,\mathrm{F}(\mathrm{R})\,d\mathrm{R}$. La somme des travaux virtuels qui proviennent des attractions de la paroi sur l'élément m est la somme des quantités analogues étendue à toute la paroi.

Appelons ρ la densité du liquide, ρ' la densité de la paroi, dv le volume de l'élément m, $d\mathrm{V}$ le volume de l'élément M,

$$m=\rho\,dv,\quad \mathrm{M}=\rho'\,d\mathrm{V};$$

la somme des travaux virtuels de toutes les forces qui agissent sur m est donc

$$-g\rho\,dv\,dz-\rho^2\,dv\int dv'f(r)\,dr-\rho\rho'\,dv\int d\mathrm{V}\,\mathrm{F}(\mathrm{R})\,d\mathrm{R}.$$

Si l'on désigne par $\varphi(r)$ et par $\Phi(\mathrm{R})$ des fonctions de r et de R telles que les dérivées de ces fonctions, par rapport à r et R, soient égales aux fonctions $f(r)$ et $\mathrm{F}(\mathrm{R})$ changées de signe,

$$f(r)=-\varphi'(r),\quad \mathrm{F}(\mathrm{R})=-\Phi'(\mathrm{R}),$$

on peut considérer la somme précédente comme la variation de la fonction

$$-g\rho z\,dv + \rho^2 dv \int dv'\varphi(r) + \rho\rho'\,dv \int d\mathrm{V}\,\Phi(\mathrm{R}).$$

Si l'on répète le même raisonnement pour tous les éléments du liquide, et si l'on remarque que le travail virtuel correspondant au déplacement de deux éléments m et m' aura été compté deux fois, on voit aisément que la somme des travaux virtuels de toutes les forces qui agissent sur le liquide est la variation de la fonction

$$(1) \qquad \Omega = -g\rho \int z\,dv + \frac{1}{2}\rho^2 \int\int dv\,dv'\varphi(r) + \rho\rho' \int\int d\mathrm{V}\,dv\,\Phi\mathrm{R}.$$

Posons, pour abréger,

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\frac{\rho}{g}\int\int dv\,dv'\,\varphi(r), \quad \mathrm{S}' = \frac{1}{2}\frac{\rho'}{g}\int\int d\mathrm{V}\,dv\,\Phi(\mathrm{R}),$$

$$(2) \qquad \Omega = -g\rho\left(\int z\,dv - \mathrm{S} - 2\mathrm{S}'\right).$$

Gauss a indiqué un mode de réduction des intégrales sextuples, S et S', indépendant de toute hypothèse sur la nature des forces $f(r)$ et $\mathrm{F}(\mathrm{R})$, puis il a supposé dans le résultat final que les forces cessent d'être sensibles à partir d'une distance très-petite; on obtient le même résultat, d'une manière plus rapide, en introduisant immédiatement cette dernière hypothèse.

1° Appelons λ la distance limite à laquelle deux éléments liquides cessent d'agir, ou le rayon d'activité moléculaire propre au liquide, et négligeons tout d'abord les termes de l'intégrale S qui se rapportent à deux éléments situés à une distance supérieure à λ.

Soient u l'aire de la surface libre du liquide, t l'aire de la surface du liquide en contact avec la paroi. Imaginons, en tous les points des deux surfaces u et t, des normales à ces surfaces; prenons sur toutes ces normales, à partir des surfaces et du côté du liquide, une longueur λ; les extrémités de ces normales forment une surface qui décompose le volume v du liquide en deux parties, l'une intérieure, dont le volume est v_1, l'autre extérieure, dont le volume est v_2.

Considérons d'abord un élément m du volume intérieur v_1; le point m est à une distance de la surface extérieure du liquide supérieure à λ, de sorte que la sphère décrite de m comme centre avec le rayon λ est entièrement située à l'intérieur du liquide. La portion de l'intégrale S relative au point m est évidemment proportionnelle à dv et peut se représenter par $K\,dv$, de sorte que la portion de S relative au volume v_1 est Kv_1.

Considérons ensuite un élément m du volume extérieur v_2; le point m est à une distance de la surface extérieure du liquide inférieure à λ, de sorte que la sphère décrite de m comme centre avec le rayon λ est en partie extérieure au liquide. La portion de l'intégrale S relative au point m est alors égale à $K\,dv$, diminué d'une certaine quantité $\mu\,dv$, provenant du segment sphérique extérieur au liquide, en le supposant rempli du liquide lui-même.

Imaginons sur la surface extérieure du liquide un élément superficiel ω; circonscrivons à cet élément un cylindre normal à la surface extérieure du liquide, et menons deux plans perpendiculaires aux génératrices du cylindre, à des distances de la surface extérieure x et $x + dx$: ces plans découpent dans le cylindre un élément de volume $\omega\,dx$ et la portion de S relative à cet élément est

$$(K - \mu)\,\omega\,dx.$$

Pour le cylindre circonscrit à l'élément ω et compris dans le volume v_2, la somme des termes analogues est

$$\omega\left(K\lambda - \int_0^\lambda \mu\,dx\right);$$

or la dernière intégrale est une quantité constante que nous représenterons par α_2,

$$\int_0^\lambda \mu\,dx = \alpha^2,$$

de sorte que la portion de S relative au volume extérieur v_2 est

$$Kv_2 - \alpha^2(t + u).$$

En réunissant cette expression à la portion de S relative au volume intérieur v_1,

$$S = Kv - \alpha^2(t + u).$$

Pour former cette valeur de S, on a négligé les termes de l'intégrale qui se rapportent à deux éléments situés à une distance supérieure à λ. Pour deux éléments placés dans cette condition, $f(r) = 0$ par hypothèse; par suite $\varphi'(r) = 0$ et $\varphi(r)$ devient constant, de sorte que la considération de pareils éléments a uniquement pour effet d'introduire dans la valeur de S un terme nouveau qui ne dépend que du volume v; par suite, si l'on désigne par c une constante qui dépende uniquement du volume du liquide, la valeur de S peut s'écrire définitivement

$$S = c - \alpha^2(t + u).$$

2° L'expression de S′ se déduit immédiatement de ce qui précède. En effet, désignons par λ' la distance limite à laquelle deux éléments, l'un liquide et l'autre solide, cessent d'agir mutuellement, et négligeons tout d'abord les termes de l'intégrale S′ qui se rapportent à deux éléments situés à une distance supérieure à λ'.

Considérons un élément ω situé sur la surface t; circonscrivons à cet élément un cylindre normal à la surface et menons du côté du liquide deux plans perpendiculaires aux génératrices du cylindre à des distances x et $x + dx$ de la surface : ces plans découpent dans le cylindre un volume $\omega\,dx$ et la portion de S′, relative à cet élément de volume, peut se représenter par $\mu'\omega\,dx$, en désignant par μ' une quantité analogue à μ.

Pour tous les éléments du cylindre considéré, la portion correspondante de S′ est

$$\omega\int_0^{\lambda'}\mu'\,dx,$$

et si l'on pose, comme précédemment,

$$\int_0^{\lambda'}\mu'\,dx = 6^2,$$

la portion de S′ qui correspond à la surface t a pour expression $6^2 t$.

La considération des éléments situés à une distance supérieure à λ' conduit à ajouter, d'après les raisonnements qui précèdent, à la valeur précédente un terme c' qui dépend uniquement des volumes du liquide et de la paroi.

$$S' = c' + 6^2 t.$$

Si l'on reporte les valeurs de S et de S' dans la relation (2) et si l'on désigne par C l'ensemble des termes constants,

$$\Omega = C - g\rho\left[\int z\,dv + (\alpha^2 - 2 6^2)\,t + \alpha^2 u\right];$$

telle est l'expression de Ω dans le cas d'un seul liquide. Si l'on suppose maintenant qu'il existe deux liquides dans le vase et que l'on désigne par Ω_0 et par Ω_1 les portions de Ω relatives aux deux liquides, par ρ_1 la densité du second liquide, par $\psi(r_1)$ la force attractive qui s'exerce entre l'élément dv du premier liquide et l'élément dv_1 du second liquide, situés à la distance r_1, la valeur de Ω_0 sera donnée par la relation (1), en y ajoutant le terme

$$\frac{1}{2}\rho\rho_1\int\int dv\,dv_1\,\Psi(r_1),$$

où $\Psi(r_1)$ désigne la fonction primitive de $\psi(r_1)$ changée de signe.

En posant comme précédemment

$$S'' = \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{g}\int\int dv\,dv_1\,\Psi(r_1),$$

$$\Omega_0 = -g\rho\left(\int z\,dv - S - 2S' - S''\right).$$

Si l'on désigne par s la surface commune aux deux liquides, par γ^2 une constante analogue à 6^2, et si l'on remarque que la surface extérieure du premier liquide est maintenant $t + u + s$, la valeur précédente peut s'écrire

$$\Omega_0 = C - g\rho\left[\int z\,dv + (\alpha^2 - 2 6^2)\,t + \alpha^2 u + (\alpha^2 - \gamma^2)\,s\right]. \tag{3}$$

De même

$$(4)\qquad \Omega_1 = C_1 - g\rho_1\left[\int z\,dv_1 + (\alpha_1^2 - 2\beta_1^2)\,t_1 + \alpha_1^2\,u_1 + (\alpha_1^2 - \gamma_1^2)\,s\right].$$

Il existe entre les deux constantes γ^2 et γ_1^2 une relation fort simple; en effet

$$\gamma^2 s = \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{g}\int\int dv\,dv_1\,\Psi(r_1),$$

$$\gamma_1^2 s = \frac{1}{2}\frac{\rho}{g}\int\int dv\,dv_1\,\Psi(r_1);$$

donc

$$\rho\gamma^2 = \rho_1\gamma_1^2.$$

Nous désignerons, pour abréger, par L_0 le liquide auquel se rapporte Ω_0, par L_1 le liquide auquel se rapporte Ω_1.

II. Supposons que le liquide L_1 soit contenu dans un vase où plonge un tube capillaire, et supposons que l'on dépose le liquide L_0 au-dessus du ménisque formé par le premier liquide L_1. Il est facile de déterminer la surface terminale du liquide L_0, l'angle de raccordement de cette surface avec la paroi et le volume liquide soulevé dans le tube capillaire, en appliquant la méthode fort simple indiquée par M. Bertrand.

Équation de la surface terminale. — Pour trouver l'équation de la surface capillaire terminale, il suffit de supposer que cette surface éprouve seule une modification, en conservant le même contour. Alors la variation de Ω se compose uniquement de la variation de

$$-g\rho\left(\int z\,dv + \alpha^2 u\right).$$

Considérons sur la surface u un élément superficiel ω limité par quatre lignes de courbure : soient ω' l'élément correspondant sur la nouvelle surface infiniment voisine de u; ε la portion infiniment petite de la normale à la surface u comprise entre les deux surfaces; R et R' les rayons de courbure principaux au point considéré de la surface u. Supposons, pour fixer les idées, la surface u concave et admettons

qu'au point considéré le liquide s'élève, par le fait du déplacement virtuel.

D'après un théorème démontré par M. Bertrand dans son Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales,

$$\omega' - \omega = -\omega\varepsilon\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Si l'on pose $\omega\varepsilon = dv$, la variation de Ω a pour valeur

$$(5) \qquad d\Omega = -g\rho\int\left[z - \alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right]dv.$$

Mais le volume du liquide restant le même, la somme des travaux virtuels s'annule si l'on pose

$$(6) \qquad z - \alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \lambda,$$

en désignant par λ une constante qui dépend de la position du plan horizontal arbitraire à partir duquel on compte l'ordonnée z : nous supposerons que ce plan coïncide avec la surface libre du liquide dans le vase et que les ordonnées soient comptées positivement au-dessus de ce plan.

Angle de raccordement. — Pour trouver l'angle de raccordement de la surface avec la paroi, il suffit de supposer que le liquide terminal éprouve, comme précédemment, une modification, sans conserver toutefois le même contour le long du tube.

Désignons par u' la nouvelle surface terminale du liquide; élevons en tous les points du contour primitif de la surface u des normales à cette surface et désignons, pour abréger, par S la surface déterminée par ces normales. L'intervalle compris entre les deux surfaces u, u' et la paroi du tube peut alors se décomposer en deux parties, l'une comprise entre u, u' et S, l'autre comprise entre u', S et la paroi du tube.

Considérons la première partie : en conservant les notations précédentes, la variation de Ω qui correspond à cette partie du liquide est donnée par la relation (5); mais, d'après l'équation de la surface capil-

laire (6), cette variation est nulle. Il suffit donc d'examiner la variation de Ω qui correspond à la seconde partie du liquide.

Considérons sur le contour de la surface u un élément rectiligne ds : désignons par e la portion infiniment petite de la normale menée par un point de cet élément à la surface u et limitée à la surface u'; désignons par i l'angle sous lequel le liquide coupe la paroi.

1° A l'élément ds correspond un accroissement de la surface libre $e\,ds \cot i$.

2° A l'élément ds correspond un accroissement de la surface t égal à $\frac{e\,ds}{\sin i}$.

3° Au même élément ds correspond un accroissement du volume du liquide égal à $\frac{1}{2} e^2 ds \cot i$. La variation de Ω qui correspond au changement de forme du liquide est finalement

$$d\Omega = -g\rho \int e\,ds \left(\frac{1}{2} ez + \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{\cos i} + \alpha^2\right) \cot i.$$

Si l'on remarque que l'épaisseur e est infiniment petite et que $d\Omega$ doit s'annuler, quel que soit e, on trouve pour valeur de l'angle de raccordement

$$\cos i = \frac{2\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2}.$$

Volume liquide soulevé. — Pour trouver l'expression du volume liquide soulevé dans un tube cylindrique vertical à section circulaire, considérons un élément ω de la surface u, limité par quatre lignes de courbure; appelons z l'ordonnée d'un point de l'élément ω, φ l'angle que fait la normale à l'élément avec la verticale.

Le volume liquide soulevé dans le tube au-dessus de la surface libre dans le vase est

$$V = \Sigma\, \omega z \cos\varphi.$$

Imaginons une seconde surface, obtenue en prolongeant les normales à la surface u d'une longueur infiniment petite ε, dirigée du côté du liquide; désignons par ω' l'élément de la nouvelle surface corres-

pondant à ω. D'après le théorème cité de M. Bertrand,

$$\omega' = \omega + \omega\varepsilon\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right);$$

mais, en tenant compte de l'équation de la surface capillaire (6),

$$\omega z = \frac{\alpha^2}{\varepsilon}(\omega' - \omega) + \omega\lambda,$$

et par suite

$$V = \frac{\alpha^2}{\varepsilon}(\Sigma\omega'\cos\varphi - \Sigma\omega\cos\varphi) + \lambda\Sigma\omega\cos\varphi.$$

Or $\Sigma\omega\cos\varphi$ et $\Sigma\omega'\cos\varphi$ sont les projections horizontales de la surface u et de la surface infiniment voisine; leur différence est la projection horizontale de la zone déterminée par les normales de longueur infiniment petite ε, menées suivant le contour de la surface terminale. La projection horizontale de cette zone a pour valeur $L\varepsilon\cos i$, en appelant L le contour de la surface terminale ou la circonférence du tube. Si l'on désigne par B la base du tube, on a finalement

$$V = \alpha^2 L\cos i + B\lambda. \tag{7}$$

Détermination de la constante λ. — L'équation de la surface capillaire, la valeur de l'angle de raccordement et l'expression du volume liquide soulevé s'appliquent également dans le cas d'un seul liquide. Dans ce cas, la constante λ se détermine par cette considération : si le tube est suffisamment large, la surface terminale du liquide dans le tube est plane à une distance suffisante de la paroi du tube, et de plus cette surface est sur le prolongement de la surface libre du liquide dans le vase,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0, \quad z = 0, \quad \lambda = 0.$$

Dans le cas de deux liquides superposés, la constante λ se détermine d'une manière analogue.

Soient MN la surface libre du liquide contenu dans le vase; AB la surface terminale du liquide contenu dans le tube capillaire; CD la surface de séparation des deux liquides dans le tube capillaire; nous sup-

poserons cette surface CD placée au-dessous de MN. Désignons par h la distance moyenne des points de la surface CD au plan horizontal MN, de sorte que le volume du liquide contenu dans la portion du tube située au-dessous de MN soit égal à Bh.

Supposons que le tube s'élargisse et que le rayon devienne assez grand pour que les deux surfaces AB et CD deviennent planes dans leur partie moyenne, à une distance suffisante de la paroi du tube, la hauteur h restant la même. L'ordonnée d'un point de la région plane de AB devient, d'après l'équation (6), égale à λ; d'ailleurs les hauteurs des deux liquides au-dessus de leur surface de séparation CD sont inversement proportionnelles à leurs densités

$$(\lambda + h)\,\rho = h\rho_1,$$

$$\lambda = h\,\frac{\rho_1 - \rho}{\rho}.$$

L'ordonnée de la surface capillaire et le volume liquide soulevé ont alors pour expressions

$$z = \alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + h\,\frac{\rho_1 - \rho}{\rho},$$

$$V = \alpha^2 L \cos i + Bh\,\frac{\rho_1 - \rho}{\rho}.$$

Ces résultats peuvent s'exprimer d'une manière fort simple. Menons à l'intérieur du tube un plan horizontal EF à la distance λ au-dessus du plan horizontal MN.

1° Si l'on compte l'ordonnée de la surface capillaire AB à partir du plan horizontal EF, cette ordonnée a la même valeur $\alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ que si le tube capillaire plongeait dans un liquide unique, tel que EF fût la surface libre du liquide dans la cuve.

2° Le volume liquide ABEF a la même valeur $\alpha^2 L \cos i$ que si le tube plongeait dans un liquide unique.

Conséquences. — Un autre cas à considérer est celui où le niveau du liquide CD est plus élevé dans le tube que dans la cuve.

Si l'on désigne alors par h la hauteur moyenne du liquide inférieur

soulevé au-dessus de la surface MN de ce liquide dans la cuve, les formules précédentes sont immédiatement applicables en changeant le signe de h,

$$z = \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - h\frac{\rho_1 - \rho}{\rho},$$

$$V = \alpha^2 L \cos i - B h \frac{\rho_1 - \rho}{\rho}.$$

Cette dernière relation peut s'écrire

$$(V - Bh) g\rho + Bh\, g\rho_1 = \alpha^2 L g\rho \cos i.$$

Sous cette forme, on voit que *la somme des poids des deux liquides soulevés dans le tube capillaire est constante et égale au poids du liquide soulevé dans le tube capillaire, lorsque ce tube plonge dans un vase qui ne renferme que le liquide supérieur;* résultat conforme aux expériences citées plus haut.

Cette proposition renferme plusieurs conséquences :

1° Lorsque la température d'un liquide soulevé dans un tube capillaire n'est pas uniforme dans toute l'étendue de la colonne, on peut considérer la colonne soulevée comme étant formée de plusieurs liquides, et, dans ce cas, le poids total du liquide soulevé dans le tube ne dépend que de la température au sommet de la colonne liquide.

Ce résultat est d'accord avec les expériences de M. Wolf (¹). Dans les recherches relatives à l'influence de la température sur les phénomènes capillaires, M. Wolf cite les expériences suivantes :

Si l'on chauffe la portion moyenne de la colonne liquide soulevée dans un tube capillaire, on observe immédiatement une ascension du ménisque. Cette ascension est à peu près égale à celle qui résulterait de la dilatation de la portion de colonne échauffée.

Si l'on refroidit, au contraire, une portion de la colonne liquide soulevée, le ménisque s'abaisse.

2° Si l'on considère une colonne liquide soulevée dans un tube capillaire et renfermant des bulles d'air à l'intérieur, le poids de la colonne liquide soulevée est constant et indépendant du nombre et du

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XLIX, p. 243.

volume des bulles d'air. Ce résultat avait déjà été indiqué, au moyen d'autres considérations, par M. Bertrand, comme une conséquence de la théorie de Gauss.

III. L'attention des physiciens est dirigée, depuis quelques années, vers l'étude de nombreux phénomènes observés au contact de deux liquides différents et liés d'une manière intime aux forces capillaires. M. Van der Mensbrugghe, dans deux Mémoires remarqués (¹), a résumé l'ensemble de ces phénomènes; il a fait connaître un grand nombre de faits nouveaux et intéressants, et de plus il a proposé des explications fondées sur l'existence de la tension superficielle des liquides.

La théorie de Gauss conduit d'une manière directe à l'explication de ce genre de phénomènes. Dans le cas de deux liquides, la fonction Ω est la somme des fonctions Ω_0 et Ω_1 relatives aux deux liquides,

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$g\rho\alpha^2 = \mathrm{F}, \quad g\rho_1\alpha_1^2 = \mathrm{F}_1,$$
$$g\rho\gamma^2 = g\rho_1\gamma_1^2 = \mathrm{G}.$$

Si l'on désigne par i et i_1 les angles de raccordement des deux liquides avec la paroi solide, par dm la masse d'un élément liquide, l'expression générale de Ω devient, d'après les relations (3) et (4),

$$\Omega = \mathrm{C} - \left[\int z\,dm - \mathrm{F}t\cos i + \mathrm{F}u + (\mathrm{F} + \mathrm{F}_1 - 2\mathrm{G})s - \mathrm{F}_1 t_1 \cos i_1 + \mathrm{F}_1 u_1\right].$$

La fonction Ω, pour l'équilibre, doit être un maximum; par conséquent la quantité contenue dans la parenthèse doit être un minimum. La recherche de ce minimum est un problème, en général, très-com-

(¹) *Sur la tension superficielle des liquides considérée au point de vue de certains mouvements observés à leur surface* (*Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. XXXIV; 1869; t. XXXVII, 1873).

plexe, dont la solution varie avec chaque cas particulier; nous examinerons quelques exemples.

a. Considérons une lame mince constituée par deux liquides différents L et L_1; le liquide L s'appuie sur un contour plan horizontal et le liquide L_1 forme une lame mince à l'intérieur du premier liquide.

Désignons par U la surface totale de la lame liquide, $u + u_1 = U$. La surface U conserve une valeur constante, le terme $\int z\,dm$ ne varie pas, t reste constant, $t_1 = 0$, la surface s est négligeable devant U : alors la quantité

$$Fu + F_1(U - u)$$

doit être minimum; par suite

$$(F - F_1)\,u$$

doit être un minimum.

1° $F > F_1$; u est minimum.

2° $F < F_1$; u est maximum.

Ainsi la surface de la lame doit s'étendre du côté du liquide pour lequel la constante F ou F_1 a la plus petite valeur.

b. Supposons que le liquide L_1 soit étalé en couche mince à la surface du liquide L.

Le terme $\int z\,dm$ ne varie pas sensiblement, t reste constant, $t_1 = 0$, la surface s peut être regardée comme sensiblement égale à u_1, et si l'on désigne, comme précédemment, par U la somme $u + u_1$, qui reste d'ailleurs constante, on voit que, pour l'équilibre, la quantité

$$(F_1 - G)\,u_1$$

doit être un minimum.

1° $F_1 > G$; u_1 est minimum, le liquide L_1 forme alors une goutte circulaire.

2° $F_1 < G$; u_1 est maximum, le liquide L_1 s'étale à la surface du liquide L.

c. Considérons enfin une goutte d'un liquide L_1 déposée à l'intérieur d'un liquide L de même densité.

Le terme $\int z\,dm$ ne varie pas, t reste constant, $t_1 = 0$, u reste constant, $u_1 = 0$; pour l'équilibre, la quantité

$$(F + F_1 - 2G)s$$

doit être un minimum.

1° $F + F_1 < 2G$; s est maximum, l'équilibre est impossible (¹).

2° $F + F_1 > 2G$; s est minimum, la goutte est sphérique; c'est le cas des expériences célèbres de M. Plateau.

d. On peut déduire de la valeur de Ω (p. 82) l'équation de la surface de séparation de deux liquides superposés dans un tube capillaire (²).

Il suffit de supposer que cette surface éprouve seule une modification en conservant le même contour. Considérons sur la surface s un élément superficiel ω limité par quatre lignes de courbure : soient ω' l'élément correspondant sur la nouvelle surface infiniment voisine de s; ε la portion infiniment petite de la normale à la surface s comprise entre les deux surfaces; R et R′ les rayons de courbure principaux au point considéré de la surface s. Supposons, pour fixer les idées, la surface s concave, et admettons qu'au point considéré le liquide s'élève par le fait du déplacement virtuel.

Si l'on pose $\omega\varepsilon = dv$, on a, d'après le théorème cité (p. 77),

$$\omega' - \omega = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dv.$$

En désignant toujours par ρ_1 et ρ les densités des liquides inférieur et supérieur, la variation du terme $\int z\,dm$ qui correspond à l'élément

(¹) Ce résultat a été indiqué déjà par Athanase Dupré au moyen d'autres considérations : *La diffusion a lieu toutes les fois que la force de réunion des deux fluides l'un avec l'autre surpasse la moyenne arithmétique de leurs forces de réunion respectives* (*Théorie mécanique de la Chaleur*, p. 372).

(²) Cette question et la suivante ont été déjà traitées par M. Quet dans le cas d'un liquide contenu dans un tube capillaire et soumis à l'action de la vapeur qu'il dégage (*Rapport sur les progrès de la capillarité*, p. 272).

de volume dv est $g(\rho_1 - \rho)\, z\, dv$. D'ailleurs les surfaces t, u, t_1, u_1 restent invariables; par suite, la variation de Ω, qui correspond à la modification précédente, est

$$d\Omega = -\int \left[g(\rho_1 - \rho)\, z - (\mathrm{F} + \mathrm{F}_1 - 2\mathrm{G}) \left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'} \right) \right] dv.$$

Mais le volume reste le même; cette somme s'annule, si l'on pose

$$z = \frac{\mathrm{F} + \mathrm{F}_1 - 2\mathrm{G}}{g(\rho_1 - \rho)} \left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'} \right) + \lambda_1,$$

en désignant par λ_1 une constante dont la valeur dépend de la position du plan horizontal arbitraire à partir duquel on compte positivement les valeurs de z; nous supposerons comme précédemment que ce plan coïncide avec la surface libre du liquide dans le vase.

Si l'on suppose que la surface de séparation des deux liquides soit située au-dessus de la surface libre du liquide dans le vase, la constante λ_1 est déterminée par la condition que la somme des poids des liquides soulevés au-dessus de la surface libre dans le vase soit égale au poids du liquide supérieur qui serait soulevé dans le même tube plongeant dans ce liquide.

Le volume du liquide inférieur soulevé au-dessus du vase est (p. 79)

$$\alpha_1^2\, \mathrm{L} \cos i' + \mathrm{B}\lambda_1,$$

en désignant par i' l'angle de raccordement du liquide inférieur avec la paroi. En appelant p le poids du liquide supérieur, on doit avoir

$$g\rho_1 (\alpha_1^2\, \mathrm{L} \cos i' + \mathrm{B}\lambda_1) + p = g\rho\, \alpha^2\, \mathrm{L} \cos i.$$

e. L'angle de raccordement i' du liquide inférieur avec la paroi se détermine par des considérations analogues aux précédentes (p. 77).

Il suffit de supposer que la surface de séparation éprouve une modification sans conserver le même contour le long du tube. Désignons par s' la nouvelle surface de séparation des deux liquides; élevons en tous les points du contour primitif de la surface s des normales à cette surface et désignons, pour abréger, par S la surface déterminée par ces normales. L'intervalle compris entre les deux surfaces s, s' et la paroi

du tube peut alors se décomposer en deux parties, l'une comprise entre s, s' et S, l'autre comprise entre s', S et la paroi du tube.

Considérons la première partie : la variation de Ω, qui lui correspond, est nulle d'après l'équation de la surface de séparation des deux liquides.

Considérons ensuite sur le contour de la surface s un élément rectiligne $d\sigma$; désignons par e la portion infiniment petite de la normale menée par un point de cet élément à la surface s et limitée à la surface s'.

1° A l'élément $d\sigma$ correspond un accroissement de la surface de séparation $e\,d\sigma \cot i'$.

2° A l'élément $d\sigma$ correspond un accroissement de la surface t_1 égal à $\frac{e\,d\sigma}{\sin i'}$ et par suite une diminution égale de la surface t.

3° Au même élément $d\sigma$ correspond un accroissement du volume liquide inférieur égal à $\frac{1}{2}e^2\,d\sigma \cot i'$ et par suite une diminution égale du volume liquide supérieur.

La variation de Ω, qui correspond au changement de la surface de séparation des deux liquides est finalement

$$d\Omega = -\int \left[\tfrac{1}{2} e z g(\rho_1 - \rho) + F + F_1 - 2G + \frac{F\cos i - F_1 \cos i_1}{\cos i'} \right] e\,d\sigma \cot i'.$$

Si l'on remarque que l'épaisseur e est infiniment petite et que $d\Omega$ doit s'annuler, quel que soit e, on trouve pour valeur de l'angle i', formé par le liquide inférieur avec la paroi,

$$\cos i' = \frac{F_1 \cos i_1 - F\cos i}{F + F_1 - 2G}.$$

EXPOSITION ANALYTIQUE

DE LA

THÉORIE DES SURFACES,

PAR M. CH. BRISSE,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

Depuis Euler, la théorie des surfaces a été exposée de bien des manières différentes, tantôt à l'aide de l'Analyse ou de la Géométrie pures, tantôt à l'aide de l'une et de l'autre. Le tableau complet des progrès de cette branche de l'Analyse appliquée a été tracé par M. Chasles dans son *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, et le nombre considérable de Mémoires qui s'y trouvent analysés porte à croire qu'une exposition nouvelle, comprenant les résultats fondamentaux actuellement acquis, pourrait être utile à ceux qui voudraient s'occuper de la théorie des surfaces.

Il semble nature d'établir d'abord ce qui est relatif à une surface quelconque considérée isolément, pour passer ensuite à la théorie des surfaces correspondantes et aux monographies. En outre, il convient de définir les éléments introduits dans cette théorie par les géomètres et d'en fournir les expressions indépendamment de tout système de coordonnées, avant de montrer les simplifications qui résultent d'un choix judicieux de ces systèmes. Tel est l'ordre que je me propose de suivre dans cette *Exposition*, dont je donne ici les débuts, et d'où j'ai exclu systématiquement toute considération géométrique.

Dans la première Section, j'établis à l'aide d'une transformation de coordonnées les formules relatives au déplacement le plus général d'un trièdre trirectangle, et j'en déduis la portion des formules de M. Codazzi qui est indépendante de la position du trièdre par rapport à

la surface. Je prouve ensuite, à l'aide de l'Analyse bien connue de M. Ossian Bonnet, que six fonctions quelconques satisfaisant à ces trois équations définissent toujours le déplacement d'un trièdre autour de son sommet et n'en définissent qu'un.

En exprimant que le trièdre a deux de ses arêtes tangentes à une surface, on trouve la seconde portion des formules de M. Codazzi en coordonnées rectangulaires et en coordonnées obliques, sous la forme où M. Laguerre les a données dans les *Nouvelles Annales* de 1872. J'ai d'ailleurs établi toutes mes formules dans l'un et l'autre système de coordonnées, en leur donnant le même numéro, et en affectant ce dernier d'un accent pour les coordonnées obliques.

En exprimant que le trièdre est formé par la tangente, la normale principale et la binormale d'une courbe gauche, on obtient, au lieu des formules de M. Codazzi, les formules de M. Serret. Comme on a quelquefois à différentier ces formules jusqu'à un ordre assez élevé, je crois être utile en publiant les résultats que j'ai obtenus jusqu'au sixième ordre inclusivement, et dont je garantis l'exactitude. J'en déduis plusieurs formules qui renferment, comme cas particuliers, quelques théorèmes de Géométrie infinitésimale dus à M. Ossian Bonnet.

Cette Section se termine par les formules qui donnent le plan osculateur, le rayon de courbure et le rayon de torsion d'une ligne tracée sur une surface, quand on connaît l'angle sous lequel elle coupe les lignes coordonnées. Ces formules sont dues à M. Laguerre.

Dans la deuxième Section, je démontre le théorème d'Euler, celui de Gauss relatif à la courbure, et celui de Meusnier. De l'étude des normales autour d'un point, je déduis ensuite toutes les expressions connues de la torsion géodésique, de l'angle de deux normales infiniment voisines et de la courbure géodésique.

Dans la troisième Section, je définis les lignes de courbure, les asymptotiques et les géodésiques, et j'établis leurs équations différentielles. J'y donne le théorème de Lancret, et, d'après M. Ossian Bonnet, l'application de la théorie du dernier multiplicateur de Jacobi à l'intégration des géodésiques.

Enfin, dans la quatrième Section, j'établis la théorie des surfaces, lieux de normales, le long d'une courbe quelconque.

SECTION I.

FORMULES GÉNÉRALES.

I. — *Déplacement d'un trièdre.*

1. Considérons un trièdre trirectangle mobile d'une manière quelconque dans l'espace et, par un point fixe O, menons des parallèles $O\xi_1$, $O\eta_1$, $O\zeta_1$ à ses trois arêtes dans chacune de leurs positions. Menons également, par le point O, trois axes fixes trirectangulaires, et soient a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les cosinus des angles formés par les droites $O\xi_1$, $O\eta_1$, $O\zeta_1$ avec ces axes. Si x_1, y_1, z_1 sont, par rapport à $O\xi_1$, $O\eta_1$, $O\zeta_1$, les coordonnées d'un point invariablement lié au trièdre, ses coordonnées x, y, z, par rapport aux axes fixes, seront fournies par les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a x_1 + a' y_1 + a'' z_1,\\ y &= b x_1 + b' y_1 + b'' z_1,\\ z &= c x_1 + c' y_1 + c'' z_1.\end{aligned}\right.$$

En passant de la position actuelle du trièdre à la position infiniment voisine, ces formules donneront

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= x_1\,da + y_1\,da' + z_1\,da'',\\ dy &= x_1\,db + y_1\,db' + z_1\,db'',\\ dz &= x_1\,dc + y_1\,dc' + z_1\,dc''.\end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute les équations (2), après avoir multiplié la première par a, la deuxième par b, la troisième par c; puis la première par a', la deuxième par b', la troisième par c'; enfin la première par a'', la deuxième par b'', la troisième par c'', on obtient

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} a\,dx + b\,dy + c\,dz &= (a\,da + b\,db + c\,dc)x_1 + (a\,da' + b\,db' + c\,dc')y_1\\ &\quad + (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')z_1,\\ a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz &= (a'\,da + b'\,db + c'\,dc)x_1 + (a'\,da' + b'\,db' + c'\,dc')y_1\\ &\quad + (a'\,da'' + b'\,db'' + c'\,dc'')z_1,\\ a''dx + b''dy + c''dz &= (a''da + b''db + c''dc)x_1 + (a''da' + b''db' + c''dc')y_1\\ &\quad + (a''da'' + b''db'' + c''dc'')z_1.\end{aligned}\right.$$

Or, en différentiant les relations

$$(4)\quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1,\\ a'^2+b'^2+c'^2=1,\\ a''^2+b''^2+c''^2=1,\end{cases}\qquad (5)\quad \begin{cases} a'a''+b'b''+c'c''=0,\\ a''a+b''b+c''c=0,\\ a\,a'+b\,b'+c\,c'=0,\end{cases}$$

il vient

$$(6)\quad \begin{cases} a\,da+b\,db+c\,dc=0,\\ a'\,da'+b'\,db'+c'\,dc'=0,\\ a''\,da''+b''\,db''+c''\,dc''=0,\end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} a'\,da''+b'\,db''+c'\,dc''=-(a''\,da'+b''\,db'+c''\,dc'),\\ a''\,da+b''\,db+c''\,dc=-(a\,da''+b\,db''+c\,dc''),\\ a\,da'+b\,db'+c\,dc'=-(a'\,da+b'\,db+c'\,dc).\end{cases}$$

Portons ces valeurs dans les formules (3), nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} a\,dx+b\,dy+c\,dz=-(a'\,da+b'\,db+c'\,dc)y_1+(a\,da''+b\,db''+c\,dc'')z_1,\\ a'\,dx+b'\,dy+c'\,dz=-(a''da'+b''db'+c''dc')z_1+(a'\,da+b'\,db+c'\,dc)x_1,\\ a''\,dx+b''\,dy+c''\,dz=-(a\,da''+b\,db''+c\,dc'')x_1+(a''da'+b''db'+c''dc')y_1.\end{cases}$$

Si l'on ajoute les équations (1), après avoir multiplié la première par a, la deuxième par b, la troisième par c; puis la première par a', la deuxième par b', la troisième par c'; enfin la première par a'', la deuxième par b'', la troisième par c'', on obtient, eu égard aux équations (4) et (5),

$$(9)\quad \begin{cases} a\,x+b\,y+c\,z=x_1,\\ a'\,x+b'\,y+c'\,z=y_1,\\ a''\,x+b''\,y+c''\,z=z_1;\end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(10)\quad \begin{cases} a\,dx+b\,dy+c\,dz=-(x\,da+y\,db+z\,dc),\\ a'\,dx+b'\,dy+c'\,dz=-(x\,da'+y\,db'+z\,dc'),\\ a''\,dx+b''\,dy+c''\,dz=-(x\,da''+y\,db''+z\,dc'').\end{cases}$$

Portons ces valeurs, ainsi que celles de x_1, y_1, z_1, dans les équa-

tions (8), et nous aurons

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
x\,da + y\,db + z\,dc &= +(a'da + b'db + c'dc)(a'x + b'y + c'z)\\
&\quad -(a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')(a''x + b''y + c''z),\\
x\,da' + y\,db' + z\,dc' &= +(a''da' + b''db' + c''dc')(a''x + b''y + c''z)\\
&\quad -(a'da + b'db + c'dc)(a\,x + b\,y + c\,z),\\
x\,da'' + y\,db'' + z\,dc'' &= +(a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')(a\,x + b\,y + c\,z)\\
&\quad -(a''da' + b''db' + c''dc')(a'x + b'y + c'z).
\end{aligned}
\right.
$$

En exprimant que ces formules sont des identités en x, y, z, il vient donc

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
da &= (a'da + b'db + c'dc)\,a' - (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,a'',\\
db &= (a'da + b'db + c'dc)\,b' - (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,b'',\\
dc &= (a'da + b'db + c'dc)\,c' - (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,c'';\\
da' &= (a''da' + b''db' + c''dc')\,a'' - (a'da + b'db + c'dc)\,a,\\
db' &= (a''da' + b''db' + c''dc')\,b'' - (a'da + b'db + c'dc)\,b,\\
dc' &= (a''da' + b''db' + c''dc')\,c'' - (a'da + b'db + c'dc)\,c;\\
da'' &= (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,a - (a''da' + b''db' + c''dc')\,a',\\
db'' &= (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,b - (a''da' + b''db' + c''dc')\,b',\\
dc'' &= (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,c - (a''da' + b''db' + c''dc')\,c'.
\end{aligned}
\right.
$$

Telles sont les relations fondamentales qui vont nous permettre de passer d'une position quelconque d'un trièdre trirectangle à la position infiniment voisine.

II. — *Formules de M. Codazzi.*

2. Imaginons qu'un point décrive une surface quelconque

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

et que a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' soient aussi des fonctions connues de u et de v. Alors les expressions

$$a'da + b'db + c'dc, \quad a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'', \quad a''da' + b''db' + c''dc'$$

seront des fonctions connues de u et de v. En les désignant par

$+ \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv$, $- \mathrm{P}\,du - \mathrm{S}\,dv$, $- \mathrm{R}\,du - \mathrm{Q}\,dv$, on aura

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} a'\,da + b'\,db + c'\,dc &= +\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv,\\ a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'' &= -\mathrm{P}\,du - \mathrm{S}\,dv,\\ a''da' + b''db' + c''dc' &= -\mathrm{R}\,du - \mathrm{Q}\,dv,\end{aligned}\right.$$

et les équations fondamentales du mouvement du trièdre deviendront

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} da &= +(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\,a' + (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\,a'',\\ db &= +(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\,b' + (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\,b'',\\ dc &= +(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\,c' + (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\,c'';\\ da' &= -(\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\,a'' - (\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\,a,\\ db' &= -(\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\,b'' - (\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\,b,\\ dc' &= -(\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\,c'' - (\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\,c;\\ da'' &= -(\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\,a + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\,a',\\ db'' &= -(\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\,b + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\,b',\\ dc'' &= -(\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\,c + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\,c'.\end{aligned}\right.$$

Si le sommet du trièdre doit de plus coïncider avec le point décrivant la surface, son mouvement dans l'espace sera complétement déterminé.

3. Nous allons chercher si, réciproquement, à tout système de valeurs de M, N, P, Q, R, S correspond un mouvement déterminé du trièdre autour de l'origine et un seul ([1]).

A cet effet, groupons les équations (14) de la manière suivante :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} da &= +(\mathrm{M}a' + \mathrm{P}a'')\,du + (\mathrm{N}a' + \mathrm{S}a'')\,dv,\\ da' &= -(\mathrm{R}a'' + \mathrm{M}a)\,du - (\mathrm{Q}a'' + \mathrm{N}a)\,dv,\\ da'' &= -(\mathrm{P}a - \mathrm{R}a')\,du - (\mathrm{S}a - \mathrm{Q}a')\,dv;\\ db &= +(\mathrm{M}b' + \mathrm{P}b'')\,du + (\mathrm{N}b' + \mathrm{S}b'')\,dv,\\ db' &= -(\mathrm{R}b'' + \mathrm{M}b)\,du - (\mathrm{Q}b'' + \mathrm{N}b)\,dv,\\ db'' &= -(\mathrm{P}b - \mathrm{R}b')\,du - (\mathrm{S}b - \mathrm{Q}b')\,dv;\\ dc &= +(\mathrm{M}c' + \mathrm{P}c'')\,du + (\mathrm{N}c' + \mathrm{S}c'')\,dv,\\ dc' &= -(\mathrm{R}c'' + \mathrm{M}c)\,du - (\mathrm{Q}c'' + \mathrm{N}c)\,dv,\\ dc'' &= -(\mathrm{P}c - \mathrm{R}c')\,du - (\mathrm{S}c - \mathrm{Q}c')\,dv.\end{aligned}\right.$$

([1]) Dans tout ce paragraphe 3, nous n'avons fait que reproduire textuellement l'analyse donnée par M. Ossian Bonnet dans son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, où il a le premier montré toute l'importance des formules de M. Codazzi.

Ces équations équivalent aux suivantes :

$$(16)\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{da}{du}=+\mathrm{M}a'+\mathrm{P}a'', & \dfrac{db}{du}=+\mathrm{M}b'+\mathrm{P}b'', & \dfrac{dc}{du}=+\mathrm{M}c'+\mathrm{P}c'',\\[2mm] \dfrac{da'}{du}=-\mathrm{R}a''-\mathrm{M}a, & \dfrac{db'}{du}=-\mathrm{R}b''-\mathrm{M}b, & \dfrac{dc'}{du}=-\mathrm{R}c''-\mathrm{M}c,\\[2mm] \dfrac{da''}{du}=-\mathrm{P}a+\mathrm{R}a', & \dfrac{db''}{du}=-\mathrm{P}b+\mathrm{R}b', & \dfrac{dc''}{du}=-\mathrm{P}c+\mathrm{R}c',\end{array}\right.$$

$$(17)\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{da}{dv}=+\mathrm{N}a'+\mathrm{S}a'', & \dfrac{db}{dv}=+\mathrm{N}b'+\mathrm{S}b'', & \dfrac{dc}{dv}=+\mathrm{N}c'+\mathrm{S}c'',\\[2mm] \dfrac{da'}{dv}=-\mathrm{Q}a''-\mathrm{N}a, & \dfrac{db'}{dv}=-\mathrm{Q}b''-\mathrm{N}b, & \dfrac{dc'}{dv}=-\mathrm{Q}c''-\mathrm{N}c,\\[2mm] \dfrac{da''}{dv}=-\mathrm{S}a+\mathrm{Q}a', & \dfrac{db''}{dv}=-\mathrm{S}b+\mathrm{Q}b', & \dfrac{dc''}{dv}=-\mathrm{S}c+\mathrm{Q}c',\end{array}\right.$$

et l'on doit avoir avant tout

$$(18)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d}{dv}(\mathrm{M}a'+\mathrm{P}a'')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{N}a'+\mathrm{S}a''),\\[2mm] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{R}a''+\mathrm{M}a)=\dfrac{d}{du}(\mathrm{Q}a''+\mathrm{N}a),\\[2mm] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{P}a-\mathrm{R}a')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{S}a-\mathrm{Q}a');\\[2mm] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{M}b'+\mathrm{P}b'')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{N}b'+\mathrm{S}b''),\\[2mm] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{R}b''+\mathrm{M}b)=\dfrac{d}{du}(\mathrm{Q}b''+\mathrm{N}b),\\[2mm] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{P}b-\mathrm{R}b')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{S}b-\mathrm{Q}b');\\[2mm] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{M}c'+\mathrm{P}c'')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{N}c'+\mathrm{S}c''),\\[2mm] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{R}c''+\mathrm{M}c)=\dfrac{d}{du}(\mathrm{Q}c''+\mathrm{N}c),\\[2mm] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{P}c-\mathrm{R}c')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{S}c-\mathrm{Q}c'),\end{array}\right.$$

ce qui, en effectuant et remplaçant les différentielles partielles de a, a',

a'', b, b', b'', c, c', c'' par leurs valeurs, conduit aux conditions

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{dM}{dv} - \dfrac{dN}{du} = RS - PQ, \\ \dfrac{dP}{dv} - \dfrac{dS}{du} = MQ - RN, \\ \dfrac{dR}{dv} - \dfrac{dQ}{du} = NP - MS. \end{cases}$$

Supposons ces conditions remplies ; on sait que, quelles que soient les quantités M, P, R, il existe une infinité de systèmes de valeurs de a, a', a'' satisfaisant aux équations (16), et qu'en appelant a_1, a'_1, a''_1, a_2, a'_2, a''_2, a_3, a'_3, a''_3 trois de ces systèmes, pour lesquels le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, les valeurs les plus générales de a, a', a'' sont

$$(20)\qquad \begin{cases} a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, \\ a' = \alpha_1 a'_1 + \alpha_2 a'_2 + \alpha_3 a'_3, \\ a'' = \alpha_1 a''_1 + \alpha_2 a''_2 + \alpha_3 a''_3, \end{cases}$$

α_1, α_2, α_3 étant des fonctions arbitraires de v.

Cela posé, assujettissons les valeurs précédentes de a, a', a'' à vérifier les équations (17), nous aurons

$$(21)\qquad \begin{cases} a_1 \dfrac{d\alpha_1}{dv} + a_2 \dfrac{d\alpha_2}{dv} + a_3 \dfrac{d\alpha_3}{dv} \\ \quad = \left(+Na'_1 + Sa''_1 - \dfrac{da_1}{dv}\right)\alpha_1 + \left(+Na'_2 + Sa''_2 - \dfrac{da_2}{dv}\right)\alpha_2 + \left(+Na'_3 + Sa''_3 - \dfrac{da_3}{dv}\right)\alpha_3, \\ a'_1 \dfrac{d\alpha_1}{dv} + a'_2 \dfrac{d\alpha_2}{dv} + a'_3 \dfrac{d\alpha_3}{dv} \\ \quad = \left(-Qa''_1 - Na_1 - \dfrac{da'_1}{dv}\right)\alpha_1 + \left(-Qa''_2 - Na_2 - \dfrac{da'_2}{dv}\right)\alpha_2 + \left(-Qa''_3 - Na_3 - \dfrac{da'_3}{dv}\right)\alpha_3, \\ a''_1 \dfrac{d\alpha_1}{dv} + a''_2 \dfrac{d\alpha_2}{dv} + a''_3 \dfrac{d\alpha_3}{dv} \\ \quad = \left(-Sa_1 + Qa'_1 - \dfrac{da''_1}{dv}\right)\alpha_1 + \left(-Sa_2 + Qa'_2 - \dfrac{da''_2}{dv}\right)\alpha_2 + \left(-Sa_3 + Qa'_3 - \dfrac{da''_3}{dv}\right)\alpha_3. \end{cases}$$

Ces équations fourniront pour α_1, α_2, α_3 des valeurs convenables, c'est-à-dire des valeurs fonctions de v seul, si leur système est équivalent à celui que l'on obtient en les dérivant par rapport à u, α_1, α_2, α_3, $\frac{d\alpha_1}{dv}, \frac{d\alpha_2}{dv}, \frac{d\alpha_3}{dv}$ étant traités comme des constantes, c'est-à-dire au système des trois équations

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{da_1}{du}\frac{d\alpha_1}{dv}+\frac{da_2}{du}\frac{d\alpha_2}{dv}+\frac{da_3}{du}\frac{d\alpha_3}{dv}\\
&\quad=\left(+\mathrm{N}\frac{da'_1}{du}+\mathrm{S}\frac{da''_1}{du}+a'_1\frac{d\mathrm{N}}{du}+a''_1\frac{d\mathrm{S}}{du}-\frac{d^2a_1}{du\,dv}\right)\alpha_1\\
&\quad+\left(+\mathrm{N}\frac{da'_2}{du}+\mathrm{S}\frac{da''_2}{du}+a'_2\frac{d\mathrm{N}}{du}+a''_2\frac{d\mathrm{S}}{du}-\frac{d^2a_2}{du\,dv}\right)\alpha_2\\
&\quad+\left(+\mathrm{N}\frac{da'_3}{du}+\mathrm{S}\frac{da''_3}{du}+a'_3\frac{d\mathrm{N}}{du}+a''_3\frac{d\mathrm{S}}{du}-\frac{d^2a_3}{du\,dv}\right)\alpha_3,\\[1ex]
&\frac{da'_1}{du}\frac{d\alpha_1}{dv}+\frac{da'_2}{du}\frac{d\alpha_2}{dv}+\frac{da'_3}{du}\frac{d\alpha_3}{dv}\\
&\quad=\left(-\mathrm{Q}\frac{da''_1}{du}-\mathrm{N}\frac{da_1}{du}-a''_1\frac{d\mathrm{Q}}{du}-a_1\frac{d\mathrm{N}}{du}-\frac{d^2a'_1}{du\,dv}\right)\alpha_1\\
&\quad+\left(-\mathrm{Q}\frac{da''_2}{du}-\mathrm{N}\frac{da_2}{du}-a''_2\frac{d\mathrm{Q}}{du}-a_2\frac{d\mathrm{N}}{du}-\frac{d^2a'_2}{du\,dv}\right)\alpha_2\\
&\quad+\left(-\mathrm{Q}\frac{da''_3}{du}-\mathrm{N}\frac{da_3}{du}-a''_3\frac{d\mathrm{Q}}{du}-a_3\frac{d\mathrm{N}}{du}-\frac{d^2a'_3}{du\,dv}\right)\alpha_3,\\[1ex]
&\frac{da''_1}{du}\frac{d\alpha_1}{dv}+\frac{da''_2}{du}\frac{d\alpha_2}{dv}+\frac{da''_3}{du}\frac{d\alpha_3}{dv}\\
&\quad=\left(-\mathrm{S}\frac{da_1}{du}+\mathrm{Q}\frac{da'_1}{du}-a_1\frac{d\mathrm{S}}{du}+a'_1\frac{d\mathrm{Q}}{du}-\frac{d^2a''_1}{du\,dv}\right)\alpha_1\\
&\quad+\left(-\mathrm{S}\frac{da_2}{du}+\mathrm{Q}\frac{da'_2}{du}-a_2\frac{d\mathrm{S}}{du}+a'_2\frac{d\mathrm{Q}}{du}-\frac{d^2a''_2}{du\,dv}\right)\alpha_2\\
&\quad+\left(-\mathrm{S}\frac{da_3}{du}+\mathrm{Q}\frac{da'_3}{du}-a_3\frac{d\mathrm{S}}{du}+a'_3\frac{d\mathrm{Q}}{du}-\frac{d^2a''_3}{du\,dv}\right)\alpha_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Or cela a lieu évidemment; en effet, en multipliant la deuxième des équations (21) par M, la troisième par P, et en ajoutant membre à membre, on trouve la première des équations (22), ou plutôt ce que devient cette équation lorsqu'on y remplace les dérivées premières et secondes des quantités a_1, a'_1, a''_1, a_2, a'_2, a''_2, a_3, a'_3, a''_3 par les valeurs déduites de

la définition de ces quantités, et les dérivées $\frac{dN}{du}$, $\frac{dS}{du}$, $\frac{dQ}{du}$ par les valeurs déduites des équations (19); de même, en multipliant la troisième des équations (21) par $-R$, la première par $-M$, et en ajoutant membre à membre, on trouve une équation équivalente à la deuxième des équations (22); enfin, en multipliant la première des équations (21) par $-P$, la deuxième par R, et en ajoutant membre à membre, on trouve une équation équivalente à la troisième des équations (22).

Ainsi il existe toujours une infinité de systèmes de valeurs de a, a', a'' vérifiant les équations (16) et (17), lorsque M, N, P, Q, R, S satisfont aux relations (19); de plus, si a_1, a'_1, a''_1, a_2, a'_2, a''_2, a_3, a'_3, a''_3 représentent trois de ces systèmes, pour lesquels le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, les valeurs les plus générales des a, a', a'' sont

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3,\\ a' &= \alpha_1 a'_1 + \alpha_2 a'_2 + \alpha_3 a'_3,\\ a'' &= \alpha_1 a''_1 + \alpha_2 a''_2 + \alpha_3 a''_3,\end{aligned}\right.$$

α_1, α_2, α_3 étant des constantes arbitraires. On aurait de même

$$(23)\ \left\{\begin{aligned} b &= \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3,\\ b' &= \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \beta_3 a'_3,\\ b'' &= \beta_1 a''_1 + \beta_2 a''_2 + \beta_3 a''_3;\end{aligned}\right.\qquad (23)\ \left\{\begin{aligned} c &= \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3,\\ c' &= \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \gamma_3 a'_3,\\ c'' &= \gamma_1 a''_1 + \gamma_2 a''_2 + \gamma_3 a''_3,\end{aligned}\right.$$

β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 étant six nouvelles constantes arbitraires.

Ces constantes ne sont pas quelconques, car on doit avoir

$$(24)\ \left\{\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1,\\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1,\\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1,\end{aligned}\right.\qquad (25)\ \left\{\begin{aligned} bc + b'c' + b''c'' &= 0,\\ ca + c'a' + c''a'' &= 0,\\ ab + a'b' + a''b'' &= 0.\end{aligned}\right.$$

l faut donc encore en prouver l'existence et montrer comment on

les obtient; or, d'après la définition même des quantités a_1, a'_1, a''_1, a_2, a'_2, a''_2, a_3, a'_3, a''_3 (16) et (17), les six fonctions

$$a_1^2 + a_1'^2 + a_1''^2, \qquad a_2^2 + a_2'^2 + a_2''^2, \qquad a_3^2 + a_3'^2 + a_3''^2,$$
$$a_2 a_3 + a'_2 a'_3 + a''_2 a''_3, \quad a_3 a_1 + a'_3 a'_1 + a''_3 a''_1, \quad a_1 a_2 + a'_1 a'_2 + a''_1 a''_2$$

sont constantes. Posons donc

$$(26)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a_1^2 + a_1'^2 + a_1''^2 = A_1, & a_2 a_3 + a'_2 a'_3 + a''_2 a''_3 = B_1, \\ a_2^2 + a_2'^2 + a_2''^2 = A_2, & a_3 a_1 + a'_3 a'_1 + a''_3 a''_1 = B_2, \\ a_3^2 + a_3'^2 + a_3''^2 = A_3, & a_1 a_2 + a'_1 a'_2 + a''_1 a''_2 = B_3, \end{array}\right.$$

les relations (24) et (25) deviendront

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_1 \alpha_1^2 + A_2 \alpha_2^2 + A_3 \alpha_3^2 + 2B_1 \alpha_2 \alpha_3 + 2B_2 \alpha_3 \alpha_1 + 2B_3 \alpha_1 \alpha_2 = 1, \\ A_1 \beta_1^2 + A_2 \beta_2^2 + A_3 \beta_3^2 + 2B_1 \beta_2 \beta_3 + 2B_2 \beta_3 \beta_1 + 2B_3 \beta_1 \beta_2 = 1, \\ A_1 \gamma_1^2 + A_2 \gamma_2^2 + A_3 \gamma_3^2 + 2B_1 \gamma_2 \gamma_3 + 2B_2 \gamma_3 \gamma_1 + 2B_3 \gamma_1 \gamma_2 = 1, \end{array}\right.$$

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_1 \beta_1 \gamma_1 + A_2 \beta_2 \gamma_2 + A_3 \beta_3 \gamma_3 + B_1 (\beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2) \\ \qquad + B_2 (\beta_3 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_3) + B_3 (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) = 0, \\ A_1 \gamma_1 \alpha_1 + A_2 \gamma_2 \alpha_2 + A_3 \gamma_3 \alpha_3 + B_1 (\gamma_2 \alpha_3 + \gamma_3 \alpha_2) \\ \qquad + B_2 (\gamma_3 \alpha_1 + \gamma_1 \alpha_3) + B_3 (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1) = 0, \\ A_1 \alpha_1 \beta_1 + A_2 \alpha_2 \beta_2 + A_3 \alpha_3 \beta_3 + B_1 (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) \\ \qquad + B_2 (\alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_3) + B_3 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) = 0; \end{array}\right.$$

α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 sont donc les coordonnées ξ, η, ζ des extrémités respectives de trois diamètres conjugués de la surface du second ordre représentée par l'équation

$$(29)\qquad A_1 \xi^2 + A_2 \eta^2 + A_3 \zeta^2 + 2B_1 \eta\zeta + 2B_2 \zeta\xi + 2B_3 \xi\eta = 1.$$

D'ailleurs ces coordonnées sont toutes finies, sans quoi la surface du second degré aurait une infinité de centres, et le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_3 & B_2 \\ B_3 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 \end{vmatrix}$$

serait nul, ce qui ne peut être; car ce déterminant, d'après une pro-

priété connue, est le carré du suivant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix},$$

lequel n'est pas nul par hypothèse.

Ainsi il existe toujours des valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ vérifiant les relations (24) et (25). On peut même déterminer une infinité de systèmes de valeurs admissibles de ces constantes; mais il est aisé de voir que ces différents systèmes répondent aux différentes positions des axes de coordonnées $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ dans l'espace.

Considérons, en effet, un premier système de valeurs admissibles de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, et proposons-nous d'en déduire un second tout à fait quelconque. J'appelle l, l', l'' les longueurs des diamètres conjugués de la surface (29) dont les extrémités ont pour coordonnées respectives les premières valeurs de α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3. Soient λ, μ, ν les cosinus des angles formés par le diamètre de longueur l avec les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; λ', μ', ν' les cosinus des angles formés par le diamètre de longueur l' avec les mêmes axes; λ'', μ'', ν'' les cosinus des angles formés par le diamètre de longueur l'' avec les mêmes axes, en sorte que l'on ait

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= l\lambda, & \beta_1 &= l'\lambda', & \gamma_1 &= l''\lambda'', \\ \alpha_2 &= l\mu, & \beta_2 &= l'\mu', & \gamma_2 &= l''\mu'', \\ \alpha_3 &= l\nu, & \beta_3 &= l'\nu', & \gamma_3 &= l''\nu''. \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir un nouveau système de valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, il faut chercher les coordonnées ξ, η, ζ des extrémités respectives de trois autres diamètres conjugués de la surface (29). Or, si cette surface était rapportée aux trois diamètres conjugués de longueur l, l', l'', auquel cas son équation serait

$$(31)\qquad \frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\eta^2}{l'^2} + \frac{\zeta^2}{l''^2} = 1,$$

les coordonnées des extrémités de trois diamètres conjugués quel-

conques auraient pour valeurs respectives

$$\begin{matrix} l\varpi, & l'\rho, & l''\sigma, \\ l\varpi', & l'\rho', & l''\sigma', \\ l\varpi'', & l'\rho'', & l''\sigma'', \end{matrix}$$

$\varpi, \rho, \sigma, \varpi', \rho', \sigma', \varpi'', \rho'', \sigma''$ satisfaisant aux six relations

$$(32)\quad \begin{cases} \varpi^2 + \rho^2 + \sigma^2 = 1, \\ \varpi'^2 + \rho'^2 + \sigma'^2 = 1, \\ \varpi''^2 + \rho''^2 + \sigma''^2 = 1, \end{cases} \qquad (33)\quad \begin{cases} \varpi'\varpi'' + \rho'\rho'' + \sigma'\sigma'' = 0, \\ \varpi''\varpi + \rho''\rho + \sigma''\sigma = 0, \\ \varpi\varpi' + \rho\rho' + \sigma\sigma' = 0. \end{cases}$$

Donc les coordonnées par rapport aux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ primitifs, c'est-à-dire les nouvelles valeurs de α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3, sont

$$(34)\quad \begin{cases} \alpha'_1 = l\varpi\,\lambda + l'\rho\,\lambda' + l''\sigma\,\lambda'' = \alpha_1\varpi + \beta_1\rho + \gamma_1\sigma, \\ \alpha'_2 = l\varpi\,\mu + l'\rho\,\mu' + l''\sigma\,\mu'' = \alpha_2\varpi + \beta_2\rho + \gamma_2\sigma, \\ \alpha'_3 = l\varpi\,\nu + l'\rho\,\nu' + l''\sigma\,\nu'' = \alpha_3\varpi + \beta_3\rho + \gamma_3\sigma, \\ \beta'_1 = l\varpi'\lambda + l'\rho'\lambda' + l''\sigma'\lambda'' = \alpha_1\varpi' + \beta_1\rho' + \gamma_1\sigma', \\ \beta'_2 = l\varpi'\mu + l'\rho'\mu' + l''\sigma'\mu'' = \alpha_2\varpi' + \beta_2\rho' + \gamma_2\sigma', \\ \beta'_3 = l\varpi'\nu + l'\rho'\nu' + l''\sigma'\nu'' = \alpha_3\varpi' + \beta_3\rho' + \gamma_3\sigma', \\ \gamma'_1 = l\varpi''\lambda + l'\rho''\lambda' + l''\sigma''\lambda'' = \alpha_1\varpi'' + \beta_1\rho'' + \gamma_1\sigma'', \\ \gamma'_2 = l\varpi'''\mu + l'\rho''\mu' + l''\sigma''\mu'' = \alpha_2\varpi'' + \beta_2\rho'' + \gamma_2\sigma'', \\ \gamma'_3 = l\varpi''\nu + l'\rho''\nu' + l''\sigma''\nu'' = \alpha_3\varpi'' + \beta_3\rho'' + \gamma_3\sigma''. \end{cases}$$

En portant ces valeurs à la place de α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 dans les équations (23), on trouve pour a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' de nouvelles valeurs qui s'expriment en fonction des anciennes de la manière suivante :

$$(35)\quad \begin{cases} a_1 = \alpha_1\varpi + \beta_1\rho + \gamma_1\sigma, & b_1 = \alpha_1\varpi' + \beta_1\rho' + \gamma_1\sigma', & c_1 = \alpha_1\varpi'' + \beta_1\rho'' + \gamma_1\sigma'', \\ a'_1 = \alpha_2\varpi + \beta_2\rho + \gamma_2\sigma, & b'_1 = \alpha_2\varpi' + \beta_2\rho' + \gamma_2\sigma', & c'_1 = \alpha_2\varpi'' + \beta_2\rho'' + \gamma_2\sigma'', \\ a''_1 = \alpha_3\varpi + \beta_3\rho + \gamma_3\sigma, & b''_1 = \alpha_3\varpi' + \beta_3\rho' + \gamma_3\sigma', & c''_1 = \alpha_3\varpi'' + \beta_3\rho'' + \gamma_3\sigma'', \end{cases}$$

en sorte qu'il suffit de substituer aux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ trois nouveaux axes $O\xi'$, $O\eta'$, $O\zeta'$, faisant avec les premiers des angles dont les cosinus soient respectivement ϖ, ρ, σ, ϖ', ρ', σ', ϖ'', ρ'', σ'', transformation pos-

sible d'après les relations (32) et (33), pour que les premières valeurs de a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' se changent en a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, a''_1, b''_1, c''_1. Donc les différents systèmes de valeurs de α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 conviennent bien à un même trièdre différemment placé par rapport aux axes de coordonnées $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

4. Nous allons maintenant particulariser le mouvement du trièdre, que nous avons laissé jusqu'ici absolument quelconque.

Reprenons, à cet effet, les équations du sommet

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

et supposons qu'on en déduise, pour l'élément linéaire de la surface qu'il parcourt, soit

$$ds^2 = E^2\, du^2 + G^2\, dv^2, \tag{36}$$

soit

$$ds^2 = E^2\, du^2 + 2\, EG \cos 2\omega\, du\, dv + G^2\, dv^2. \tag{36)'}$$

Dans le premier cas, les courbes obtenues en donnant respectivement à v et à u des valeurs constantes se coupent à angle droit, et l'on peut astreindre les arêtes AX, AY, AZ du trièdre à coïncider respectivement avec la tangente à la courbe $v =$ const., avec la tangente à la courbe $u =$ const., avec la normale à la surface. Pour qu'il en soit ainsi, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} dx &= a E\, du + a' G\, dv, \\ dy &= b E\, du + b' G\, dv, \\ dz &= c E\, du + c' G\, dv, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

et qu'en outre les seconds membres soient des différentielles exactes; ce qui entraîne, en tenant compte des équations (16) et (17),

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dE}{dv} + GM = 0, \\ &\frac{dG}{du} - EN = 0, \\ &ES + GR = 0. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Dans le second cas, les courbes obtenues en donnant respectivement à v et à u des valeurs constantes se coupent sous un angle 2ω, et l'on peut astreindre les arêtes AX, AY, AZ du trièdre à coïncider respectivement avec les bissectrices de cet angle et avec la normale à la surface. Pour qu'il en soit ainsi, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(37)' \quad \begin{cases} dx = a(\mathrm{E}\,du + \mathrm{G}\,dv)\cos\omega + a'(\mathrm{E}\,du - \mathrm{G}\,dv)\sin\omega, \\ dy = b(\mathrm{E}\,du + \mathrm{G}\,dv)\cos\omega + b'(\mathrm{E}\,du - \mathrm{G}\,dv)\sin\omega, \\ dz = c(\mathrm{E}\,du + \mathrm{G}\,dv)\cos\omega + c'(\mathrm{E}\,du - \mathrm{G}\,dv)\sin\omega, \end{cases}$$

et qu'en outre les seconds membres soient des différentielles exactes; ce qui entraîne, en tenant compte des équations (16) et (17),

$$(38)' \quad \begin{cases} \left(\dfrac{d\mathrm{E}}{dv} - \dfrac{d\mathrm{G}}{du}\right)\dfrac{1}{\operatorname{tang}\omega} - \mathrm{E}\left(\mathrm{N} + \dfrac{d\omega}{dv}\right) - \mathrm{G}\left(\mathrm{M} - \dfrac{d\omega}{du}\right) = 0, \\ \left(\dfrac{d\mathrm{E}}{dv} + \dfrac{d\mathrm{G}}{du}\right)\operatorname{tang}\omega + \mathrm{E}\left(\mathrm{N} + \dfrac{d\omega}{dv}\right) - \mathrm{G}\left(\mathrm{M} - \dfrac{d\omega}{du}\right) = 0, \\ \qquad (\mathrm{GR} + \mathrm{EQ})\sin\omega - (\mathrm{ES} - \mathrm{GP})\cos\omega = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, si les conditions (38) ou (38)' sont remplies, les équations (37) ou (37)' font voir qu'on obtient sur-le-champ par des quadratures les coordonnées des différents points de la surface décrite par le sommet du trièdre. D'ailleurs, les trois nouvelles constantes introduites par les quadratures n'influent en rien sur la forme de la surface; donc, finalement, à un système de valeurs de M, N, P, Q, R, S, E, G, ω vérifiant les équations (19) et (38), ou (19) et (38)', correspond toujours une surface et une seule. C'est le résultat mis en évidence par M. Ossian Bonnet.

Les équations (19), (38) et (38)' constituent les formules de M. Codazzi.

III. — *Formules de M. Serret.*

5. Imaginons qu'un point décrive une courbe quelconque

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = \chi(u),$$

et que a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' soient aussi des fonctions connues

de u. Alors les expressions

$$a'da + b'db + c'dc, \quad a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'', \quad a''da' + b''db' + c''dc'$$

seront des fonctions connues de u. En les désignant par $+M\,du$, $-P\,du$, $-R\,du$, on aura

$$(39)\quad \begin{cases} a'\,da + b'\,db + c'\,dc = +M\,du, \\ a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'' = -P\,du, \\ a''da' + b''db' + c''dc' = -R\,du, \end{cases}$$

et les équations fondamentales du mouvement du trièdre deviendront

$$(40)\quad \begin{cases} da = (Ma' + Pa'')\,du, & da' = -(Ra'' + Ma)\,du, & da'' = -(Pa - Ra')\,du, \\ db = (Mb' + Pb'')\,du, & db' = -(Rb'' + Mb)\,du, & db'' = -(Pb - Rb')\,du, \\ dc = (Mc' + Pc'')\,du, & dc' = -(Rc'' + Mc)\,du, & dc'' = -(Pc - Rc')\,du. \end{cases}$$

Si le sommet du trièdre doit de plus coïncider avec le point décrivant la courbe, son mouvement dans l'espace sera complétement déterminé.

On démontrerait, comme au n° 3, qu'à tout système de valeurs de M, P, R correspond un mouvement déterminé du trièdre autour de l'origine et un seul.

6. Pour que les trois arêtes du trièdre soient à chaque instant parallèles à la tangente AT, à la normale principale AN, à la binormale AL d'une courbe gauche, il est évidemment nécessaire et suffisant d'exprimer que AT fait avec sa position infiniment voisine A'T' un angle égal à l'angle de contingence, que le cosinus dé l'angle formé par AL avec A'T' est infiniment petit d'ordre supérieur au premier, que AL fait avec sa position infiniment voisine A'L' un angle égal à l'angle de torsion. Or la seconde condition s'exprime par l'équation

$$a''\,da + b''\,db + c''\,dc = 0,$$

ou par son équivalente (7)

$$a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'' = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a constamment

$$P = 0.$$

Pour exprimer les deux autres, calculons les angles formés par chacune des arêtes du trièdre avec sa position infiniment voisine, angles que nous désignerons par les lettres ε, ε', ε''. Nous aurons

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\varepsilon &= (a+\Delta a)\,a + (b+\Delta b)\,b + (c+\Delta c)\,c,\\ \cos\varepsilon' &= (a'+\Delta a')\,a' + (b'+\Delta b')\,b' + (c'+\Delta c')\,c',\\ \cos\varepsilon'' &= (a''+\Delta a'')\,a'' + (b''+\Delta b'')\,b'' + (c''+\Delta c'')\,c''. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace Δa, Δb, Δc, $\Delta a'$, $\Delta b'$, $\Delta c'$, $\Delta a''$, $\Delta b''$, $\Delta c''$ par leurs valeurs au troisième ordre près, et qu'on tienne compte des équations (4) et (6), il viendra

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon^2 &= -(a\,d^2a + b\,d^2b + c\,d^2c),\\ \varepsilon'^2 &= -(a'\,d^2a' + b'\,d^2b' + c'\,d^2c'),\\ \varepsilon''^2 &= -(a''d^2a'' + b''d^2b'' + c''d^2c''). \end{aligned}\right.$$

Or, des équations (6) différentiées, on tire

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} a\,d^2a + b\,d^2b + c\,d^2c &= -(da^2 + db^2 + dc^2),\\ a'\,d^2a' + b'\,d^2b' + c'\,d^2c' &= -(da'^2 + db'^2 + dc'^2),\\ a''d^2a'' + b''d^2b'' + c''d^2c'' &= -(da''^2 + db''^2 + dc''^2), \end{aligned}\right.$$

et, en remplaçant, on a

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon^2 &= da^2 + db^2 + dc^2,\\ \varepsilon'^2 &= da'^2 + db'^2 + dc'^2,\\ \varepsilon''^2 &= da''^2 + db''^2 + dc''^2. \end{aligned}\right.$$

Élevons au carré les équations (40), et ajoutons membre à membre celles qui composent un même groupe, les équations (44) deviendront

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon^2 &= (M^2 + P^2)\,du^2,\\ \varepsilon'^2 &= (R^2 + M^2)\,du^2,\\ \varepsilon''^2 &= (P^2 + R^2)\,du^2. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas qui nous occupe, on doit poser

$$P = 0, \quad \varepsilon = \frac{ds}{\rho}, \quad \varepsilon'' = \frac{ds}{r},$$

ds étant la différentielle de l'arc, ρ le rayon de courbure et r le rayon de torsion, ce qui réduit les formules (45) aux suivantes :

$$(46) \qquad \begin{cases} \dfrac{ds}{\rho} = M\,du, \\ \varepsilon'^2 = (R^2 + M^2)\,du^2, \\ \dfrac{ds}{r} = R\,du. \end{cases}$$

On en conclut d'abord

$$(47) \qquad \varepsilon'^2 = ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right);$$

puis, posant

$$(48) \qquad \begin{cases} a = \cos\alpha, & a' = \cos\xi, & a'' = \cos\lambda, \\ b = \cos\beta, & b' = \cos\eta, & b'' = \cos\mu, \\ c = \cos\gamma, & c' = \cos\zeta, & c'' = \cos\nu, \end{cases}$$

les formules (40) deviendront

$$(49) \begin{cases} d\cos\alpha = \dfrac{ds}{\rho}\cos\xi, & d\cos\xi = -\dfrac{ds}{\rho}\cos\alpha - \dfrac{ds}{r}\cos\lambda, & d\cos\lambda = \dfrac{ds}{r}\cos\xi, \\ d\cos\beta = \dfrac{ds}{\rho}\cos\eta, & d\cos\eta = -\dfrac{ds}{\rho}\cos\beta - \dfrac{ds}{r}\cos\mu, & d\cos\mu = \dfrac{ds}{r}\cos\eta, \\ d\cos\gamma = \dfrac{ds}{\rho}\cos\zeta, & d\cos\zeta = -\dfrac{ds}{\rho}\cos\gamma - \dfrac{ds}{r}\cos\nu, & d\cos\nu = \dfrac{ds}{r}\cos\zeta. \end{cases}$$

Ce sont les formules de M. Serret.

7. Ces formules permettent d'exprimer les différentielles des divers ordres des cosinus des trois angles α, ξ, λ, ou β, η, μ, ou γ, ζ, ν par des fonctions linéaires de ces mêmes cosinus dont les coefficients ne contiennent que ds, r, ρ et leurs différentielles. La même observation est applicable aux formules plus générales (40). Voici les résultats que

l'on obtient jusqu'au sixième ordre, en partant des équations (49) et en prenant l'arc pour variable indépendante :

$$
(50)\quad \left\{\begin{aligned}
d^2\cos\alpha &= -\frac{ds^2}{\rho^2}\cos\alpha + ds\,d\frac{1}{\rho}\cos\xi - \frac{ds^2}{r\rho}\cos\lambda,\\
d^2\cos\xi &= -ds\,d\frac{1}{\rho}\cos\alpha - ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\cos\xi - ds\,d\frac{1}{r}\cos\lambda,\\
d^2\cos\lambda &= -\frac{ds^2}{r\rho}\cos\alpha + ds\,d\frac{1}{r}\cos\xi - \frac{ds^2}{r^2}\cos\lambda;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(51)\quad \left\{\begin{aligned}
d^3\cos\alpha &= -3\frac{ds^2}{\rho}d\frac{1}{\rho}\cos\alpha - ds\left[\frac{ds^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - d^2\frac{1}{\rho}\right]\cos\xi\\
&\qquad - ds^2\left(\frac{2}{r}d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}d\frac{1}{r}\right)\cos\lambda,\\
d^3\cos\xi &= ds\left[\frac{ds^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - d^2\frac{1}{\rho}\right]\cos\alpha - 3ds^2\left(\frac{1}{\rho}d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r}d\frac{1}{r}\right)\cos\xi\\
&\qquad + ds\left[\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - d^2\frac{1}{r}\right]\cos\lambda,\\
d^3\cos\lambda &= -ds^2\left(\frac{1}{r}d\frac{1}{\rho} + \frac{2}{\rho}d\frac{1}{r}\right)\cos\alpha - ds\left[\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - d^2\frac{1}{r}\right]\cos\xi\\
&\qquad - 3\frac{ds^2}{r}d\frac{1}{r}\cos\lambda;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(52)\quad \left\{\begin{aligned}
d^4\cos\alpha &= ds^2\left[\frac{ds^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - 3\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 - \frac{4}{\rho}d^2\frac{1}{\rho}\right]\cos\alpha\\
&\quad - ds\left\{3ds^2\left[\left(\frac{2}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r\rho}d\frac{1}{r}\right] - d^3\frac{1}{\rho}\right\}\cos\xi\\
&\quad + ds^2\left[\frac{ds^2}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - 3d\frac{1}{\rho}d\frac{1}{r} - \frac{3}{r}d^2\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{r}\right]\cos\lambda,\\
d^4\cos\xi &= ds\left\{ds^2\left[\left(\frac{6}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho} + \frac{5}{r\rho}d\frac{1}{r}\right] - d^3\frac{1}{\rho}\right\}\cos\alpha\\
&\quad + ds^2\left[\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2 ds^2 - 3\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 - 3\left(d\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{4}{\rho}d^2\frac{1}{\rho} - \frac{4}{r}d^2\frac{1}{r}\right]\cos\xi\\
&\quad + ds\left\{ds^2\left[\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{6}{r^2}\right)d\frac{1}{r} + \frac{5}{r\rho}d\frac{1}{\rho}\right] - d^3\frac{1}{r}\right\}\cos\lambda,\\
d^4\cos\lambda &= ds^2\left[\frac{ds^2}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - 3d\frac{1}{\rho}d\frac{1}{r} - \frac{1}{r}d^2\frac{1}{\rho} - \frac{3}{\rho}d^2\frac{1}{r}\right]\cos\alpha\\
&\quad - ds\left\{3ds^2\left[\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{2}{r^2}\right)d\frac{1}{r} + \frac{1}{r\rho}d\frac{1}{\rho}\right] - d^3\frac{1}{r}\right\}\cos\xi\\
&\quad + ds^2\left[\frac{ds^2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - 3\left(d\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{4}{r}d^2\frac{1}{r}\right]\cos\lambda;
\end{aligned}\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
d^5\cos\alpha = {} & 5\,ds^2\left\{\frac{ds^2}{\rho}\left[\left(\frac{2}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r\rho}\,d\frac{1}{r}\right]-2\,d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}\,d^3\frac{1}{\rho}\right\}\cos\alpha \\
& +ds\left\{ds^2\left[\frac{ds^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2-\frac{15}{\rho}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2-\frac{12}{r}\,d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right.\right. \\
& \qquad \left.\left.-\frac{3}{\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2-2\left(\frac{5}{\rho^2}+\frac{3}{r^2}\right)d^2\frac{1}{\rho}-\frac{4}{r\rho}\,d^2\frac{1}{r}\right]+d^4\frac{1}{\rho}\right\}\cos\xi \\
& +ds^2\left\{ds^2\left[\frac{1}{r}\left(\frac{9}{\rho^2}+\frac{4}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{6}{r^2}\right)d\frac{1}{r}\right]\right. \\
& \qquad \left.-4\,d^2\frac{1}{r}\,d\frac{1}{\rho}-6\,d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{\rho}-\frac{4}{r}\,d^3\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}\,d^3\frac{1}{r}\right\}\cos\lambda, \\[2ex]
d^5\cos\xi = {} & ds\left\{ds^2\left[-\frac{ds^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2+\frac{15}{\rho}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+\frac{7}{r}\,d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right.\right. \\
& \qquad \left.\left.+\frac{8}{\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2+\left(\frac{10}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d^2\frac{1}{\rho}+\frac{9}{r\rho}\,d^2\frac{1}{r}\right]-d^4\frac{1}{\rho}\right\}\cos\alpha \\
& +5\,ds^2\left[2\,ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r}\,d\frac{1}{r}\right)-2\,d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}\right. \\
& \qquad \left.-2\,d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\,d^3\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\,d^3\frac{1}{r}\right]\cos\xi \\
& +ds\left\{ds^2\left[-\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2+\frac{8}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+\frac{7}{\rho}\,d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right.\right. \\
& \qquad \left.\left.+\frac{15}{r}\left(d\frac{1}{r}\right)^2+\frac{9}{r\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{10}{r^2}\right)d^2\frac{1}{r}\right]-d^4\frac{1}{r}\right\}\cos\lambda, \\[2ex]
d^5\cos\lambda = {} & ds^2\left\{ds^2\left[\frac{1}{r}\left(\frac{6}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{4}{\rho^2}+\frac{9}{r^2}\right)d\frac{1}{r}\right]\right. \\
& \qquad \left.-6\,d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{r}-4\,d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\,d^3\frac{1}{\rho}-\frac{4}{\rho}\,d^3\frac{1}{r}\right\}\cos\alpha \\
& +ds\left\{ds^2\left[\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2-\frac{3}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2-\frac{12}{\rho}\,d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right.\right. \\
& \qquad \left.\left.-\frac{15}{r}\left(d\frac{1}{r}\right)^2-\frac{4}{r\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}-2\left(\frac{3}{\rho^2}+\frac{5}{r^2}\right)d^2\frac{1}{r}\right]+d^4\frac{1}{r}\right\}\cos\xi \\
& +5\,ds^2\left\{\frac{ds^2}{r}\left[\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{2}{r^2}\right)d\frac{1}{r}+\frac{1}{r\rho}\,d\frac{1}{\rho}\right]-2\,d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\,d^3\frac{1}{r}\right\}\cos\lambda;
\end{aligned}
\right.
\tag{53}
$$

$$(54)\quad d^6\cos\alpha = ds^2\left\{-\frac{ds^4}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2 + ds^2\left[5\left(\frac{9}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+\frac{32}{r\rho}d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{8}{\rho^2}\left(d\frac{1}{r}\right)^2+\frac{1}{\rho}\left(\frac{20}{\rho^2}+\frac{11}{r^2}\right)d^2\frac{1}{\rho}+\frac{9}{r\rho^2}d^3\frac{1}{r}\right]$$
$$\left.-10\left(d^2\frac{1}{\rho}\right)^2-15\,d\frac{1}{\rho}\,d^3\frac{1}{\rho}-\frac{6}{\rho}d^4\frac{1}{\rho}\right\}\cos\alpha$$

$$+\,ds\left\{5\,ds^2\left[ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{3}{\rho^2}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r^2}d\frac{1}{\rho}+\frac{2}{r\rho}d\frac{1}{r}\right)-3\left(d\frac{1}{\rho}\right)^3\right.\right.$$
$$-3\,d\frac{1}{\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2-\frac{12}{\rho}d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}-\frac{4}{r}d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{r}-\frac{6}{r}d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{\rho}$$
$$\left.\left.-\frac{2}{\rho}d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{r}-\left(\frac{3}{\rho^2}+\frac{2}{r^2}\right)d^3\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r\rho}d^3\frac{1}{r}\right]+d^5\frac{1}{\rho}\right\}\cos\xi$$

$$+\,ds^2\left\{-\frac{ds^4}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2+ds^2\left[\frac{33}{r\rho}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+6\left(\frac{2}{\rho^2}+\frac{5}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}+\frac{15}{r\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\left(\frac{19}{\rho^2}+\frac{10}{r^2}\right)d^2\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{10}{r^2}\right)d^2\frac{1}{r}\right]$$
$$\left.-5\,d\frac{1}{\rho}\,d^3\frac{1}{r}-10\,d^2\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{r}-10\,d\frac{1}{r}\,d^3\frac{1}{\rho}-\frac{5}{r}d^4\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}d^4\frac{1}{r}\right\}\cos\lambda,$$

$$(54)\quad d^6\cos\xi = ds\left\{ds^2\left[-ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{15}{\rho^2}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r^2}d\frac{1}{\rho}+\frac{14}{r\rho}d\frac{1}{r}\right)+15\left(d\frac{1}{\rho}\right)^3\right.\right.$$
$$+15\,d\frac{1}{\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2+\frac{16}{r}d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{r}+\frac{60}{\rho}d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}$$
$$\left.\left.+\frac{9}{r}d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{\rho}+\frac{35}{\rho}d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{r}+\left(\frac{15}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d^3\frac{1}{\rho}+\frac{14}{r\rho}d^3\frac{1}{r}\right]-d^5\frac{1}{\rho}\right\}\cos\alpha$$

$$+\,ds^2\left\{ds^2\left[-ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^3+3\left(\frac{15}{\rho^2}+\frac{6}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+\frac{54}{r\rho}d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right.\right.$$
$$\left.+3\left(\frac{6}{\rho^2}+\frac{15}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{r}\right)^2+\frac{20}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d^2\frac{1}{\rho}+\frac{20}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d^2\frac{1}{r}\right]$$
$$\left.-15\,d\frac{1}{\rho}\,d^3\frac{1}{\rho}-10\left(d^2\frac{1}{\rho}\right)^2-\frac{6}{\rho}d^4\frac{1}{\rho}-15\,d\frac{1}{r}\,d^3\frac{1}{r}-10\left(d^2\frac{1}{r}\right)^2-\frac{6}{r}d^4\frac{1}{r}\right\}\cos\xi$$

$$+\,ds\left\{ds^2\left[-ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{14}{r\rho}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}d\frac{1}{r}+\frac{15}{r^2}d\frac{1}{r}\right)+\frac{35}{r}d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}\right.\right.$$
$$+\frac{9}{\rho}d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{r}+15\,d\frac{1}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+\frac{16}{\rho}d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{\rho}$$
$$\left.\left.+\frac{14}{r\rho}d^3\frac{1}{\rho}+\frac{60}{r}d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{r}+15\left(d\frac{1}{r}\right)^3+\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{15}{r^2}\right)d^3\frac{1}{r}\right]-d^5\frac{1}{r}\right\}\cos\lambda,$$

$$
\begin{aligned}
(54)\quad d^6\cos\lambda = ds^2\Big\{ & -\frac{ds^4}{r\rho}\left(\frac{}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2 + ds^2\left[\frac{15}{r\rho}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 + 6\left(\frac{5}{\rho^2}+\frac{2}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right. \\
& \qquad + \frac{1}{r}\left(\frac{10}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d^2\frac{1}{\rho} + \frac{33}{r\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2 \\
& \qquad \left. + \frac{1}{\rho}\left(\frac{10}{\rho^2}+\frac{19}{r^2}\right)d^2\frac{1}{r}\right] \\
& -10\,d\frac{1}{\rho}\,d^3\frac{1}{r} - 10\,d^2\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{r} - 5\,d\frac{1}{r}\,d^3\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\,d^4\frac{1}{\rho} - \frac{5}{\rho}\,d^4\frac{1}{r}\Big\}\cos\alpha \\
+ ds\Big\{ & 5\,ds^2\left[ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{2}{r\rho}\,d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\,d\frac{1}{r}+\frac{3}{r^2}\,d\frac{1}{r}\right)\right. \\
& \qquad - 3\,d\frac{1}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 - \frac{2}{r}\,d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{\rho} - \frac{6}{\rho}\,d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{r} - \frac{4}{\rho}\,d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{\rho} \\
& \qquad \left. - \frac{1}{r\rho}\,d^3\frac{1}{\rho} - 3\left(d\frac{1}{r}\right)^3 - \frac{12}{r}\,d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{r} - \left(\frac{2}{\rho^2}+\frac{3}{r^2}\right)d^3\frac{1}{r}\right] + d^5\frac{1}{r}\Big\}\cos\xi \\
+ ds^2\Big\{ & -\frac{ds^4}{r^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2 + ds^2\left[\frac{8}{r^2}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 + \frac{32}{r\rho}\,d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r} + \frac{9}{r^2\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}\right. \\
& \qquad \left. + 5\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{9}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{11}{\rho^2}+\frac{20}{r^2}\right)d^2\frac{1}{r}\right] \\
& -15\,d\frac{1}{r}\,d^3\frac{1}{r} - 10\left(d^2\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{6}{r}\,d^4\frac{1}{r}\Big\}\cos\lambda.
\end{aligned}
$$

8. Voici quelques résultats déduits de ces formules, et dont nous aurons besoin ultérieurement.

Cherchons en premier lieu les différences de coordonnées de deux points infiniment voisins. De la formule

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha,$$

on déduit, par celle de Taylor,

$$
\begin{aligned}
\delta x = ds\cos\alpha + \frac{ds}{2}\,d\cos\alpha + \frac{ds}{6}\,d^2\cos\alpha + \frac{ds}{24}\,d^3\cos\alpha \\
+ \frac{ds}{120}\,d^4\cos\alpha + \frac{ds}{720}\,d^5\cos\alpha + \frac{ds}{5040}\,d^6\cos\alpha,
\end{aligned}
$$

en s'arrêtant aux termes du septième ordre. Si l'on remplace cos α et

ses différentielles par les valeurs du n° 7, il vient

$$
\delta x = \left\{
\begin{array}{l}
ds - \dfrac{ds^3}{6\rho^2} - \dfrac{ds^3}{8\rho} d\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{ds^5}{120\rho^2}\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{r^2}\right) - \dfrac{ds^3}{30\rho} d^2\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{ds^3}{40}\left(d\dfrac{1}{\rho}\right)^2 \\[2ex]
\quad + \dfrac{ds^5}{144\rho}\left(\dfrac{2}{\rho^2} d\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r^2} d\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r\rho} d\dfrac{1}{r}\right) \\[2ex]
\quad - \dfrac{ds^5}{72} d\dfrac{1}{\rho} d^2\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{ds^5}{144\rho} d^3\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{ds^7}{5040\rho^2}\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{r^2}\right)^2 \\[2ex]
\quad + \dfrac{ds^6}{5040\rho}\left[\dfrac{35}{\rho}\left(d\dfrac{1}{\rho}\right)^2 + \dfrac{27}{r} d\dfrac{1}{r} d\dfrac{1}{\rho} + \left(\dfrac{20}{\rho^2} + \dfrac{11}{r^2}\right) d^2\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{9}{r\rho} d^2\dfrac{1}{r} + \dfrac{8}{\rho}\left(d\dfrac{1}{r}\right)^2\right] \\[2ex]
\quad + \dfrac{ds^5}{1008}\left(\dfrac{2}{\rho^2} d\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r^2} d\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r\rho} d\dfrac{1}{r}\right) d\dfrac{1}{\rho} \\[2ex]
\quad - \dfrac{ds^3}{504}\left(d^2\dfrac{1}{\rho}\right)^2 - \dfrac{ds^3}{840\rho} d^4\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{ds^3}{336} d\dfrac{1}{\rho} d^3\dfrac{1}{\rho}
\end{array}
\right\} \cos\alpha
$$

$$
+ \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{ds^2}{2\rho} + \dfrac{ds^2}{6} d\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{ds^2}{24}\left[\dfrac{ds^2}{\rho}\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{r^2}\right) - d^2\dfrac{1}{\rho}\right] \\[2ex]
\quad + \dfrac{ds^2}{120} d^3\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{ds^4}{40}\left(\dfrac{2}{\rho^2} d\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r^2} d\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r\rho} d\dfrac{1}{r}\right) \\[2ex]
\quad + \dfrac{ds^2}{720} d^4\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{ds^4}{720}\left[\dfrac{ds^2}{\rho}\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{r^2}\right)^2 - \dfrac{15}{\rho}\left(d\dfrac{1}{\rho}\right)^2 - \dfrac{3}{\rho}\left(d\dfrac{1}{r}\right)^2\right. \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad \left. - \dfrac{12}{r} d\dfrac{1}{\rho} d\dfrac{1}{r} - 2\left(\dfrac{5}{\rho^2} + \dfrac{3}{r^2}\right) d^2\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{4}{r\rho} d^2\dfrac{1}{r}\right] \\[2ex]
\quad + \dfrac{ds^2}{5040} d^5\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{ds^6}{1008}\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{r^2}\right)\left(\dfrac{3}{\rho^2} d\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r^2} d\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{2}{r\rho} d\dfrac{1}{r}\right) \\[2ex]
\quad - \dfrac{ds^4}{1008}\left[3\left(d\dfrac{1}{\rho}\right)^3 + 3d\dfrac{1}{\rho}\left(d\dfrac{1}{r}\right)^2 + \dfrac{12}{\rho} d\dfrac{1}{\rho} d^2\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{4}{r} d\dfrac{1}{\rho} d^2\dfrac{1}{r}\right. \\[2ex]
\qquad\qquad \left. + \dfrac{6}{r} d\dfrac{1}{r} d^2\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{2}{\rho} d\dfrac{1}{r} d^2\dfrac{1}{r} + \left(\dfrac{3}{\rho^2} + \dfrac{2}{r^2}\right) d^3\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{r\rho} d^3\dfrac{1}{r}\right]
\end{array}
\right\} \cos\xi
$$

$$
+\left\{
\begin{array}{l}
-\dfrac{ds^3}{6r\rho}-\dfrac{ds^3}{24}\left(\dfrac{2}{r}d\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{1}{\rho}d\dfrac{1}{r}\right)\\[2ex]
+\dfrac{ds^3}{120}\left[\dfrac{ds^2}{r\rho}\left(\dfrac{1}{\rho^4}+\dfrac{1}{r^2}\right)-3d\dfrac{1}{r}d\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{3}{r}d^2\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{1}{\rho}d^2\dfrac{1}{r}\right]\\[2ex]
+\dfrac{ds^3}{720}\left[ds^2\left(\dfrac{4}{r^3}d\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{9}{r\rho^2}d\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{1}{\rho^3}d\dfrac{1}{r}+\dfrac{6}{r^2\rho}d\dfrac{1}{r}\right)\right.\\[2ex]
\qquad\qquad\left.-\dfrac{4}{r}d^3\dfrac{1}{\rho}-6d\dfrac{1}{r}d^2\dfrac{1}{\rho}-4d^2\dfrac{1}{r}d\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{1}{\rho}d^3\dfrac{1}{r}\right]\\[2ex]
+\dfrac{ds^3}{5040}\left\{-\dfrac{ds^4}{r\rho}\left(\dfrac{1}{\rho^2}+\dfrac{1}{r^2}\right)^2+ds^2\left[\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{10}{r^2}+\dfrac{19}{\rho^2}\right)d^2\dfrac{1}{\rho}+6\left(\dfrac{5}{r^2}+\dfrac{2}{\rho^2}\right)d\dfrac{1}{r}d\dfrac{1}{\rho}\right.\right.\\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\left.+\dfrac{33}{r\rho}\left(d\dfrac{1}{\rho}\right)^2+\dfrac{15}{r\rho}\left(d\dfrac{1}{r}\right)^2+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{1}{\rho^2}+\dfrac{10}{r^2}\right)d^2\dfrac{1}{r}\right]\\[2ex]
\qquad\qquad\left.-\dfrac{5}{r}d^4\dfrac{1}{\rho}-10\,d\dfrac{1}{r}d^3\dfrac{1}{\rho}-10\,d^2\dfrac{1}{r}d^2\dfrac{1}{\rho}-5\,d\dfrac{1}{\rho}d^3\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{\rho}d^4\dfrac{1}{r}\right\}
\end{array}
\right\}\cos\lambda.
$$

Pour passer de δx à δy, puis à δz, il suffit de remplacer α, ξ, λ par β, η, μ, puis par γ, ζ, ν.

Cherchons, en deuxième lieu, la distance rectiligne de deux points A et A′ infiniment voisins. On a

$$\overline{AA'}^2=\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2,$$

et, en remplaçant δx, δy, δz par les valeurs précédentes, il vient

$$
\begin{aligned}
\overline{AA'}^2=ds^2&-\frac{ds^4}{12\rho^2}-\frac{ds^4}{12\rho}d\frac{1}{\rho}+\frac{ds^6}{360\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\\
&-\frac{ds^4}{45}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2-\frac{ds^4}{40\rho}d^2\frac{1}{\rho}+\frac{ds^6}{180\rho^3}d^3\frac{1}{\rho}\\
&-\frac{ds^4}{72}d\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{\rho}+\frac{ds^6}{360r\rho}\left(\frac{1}{r}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}d\frac{1}{r}\right)-\frac{ds^6}{180\rho}d^3\frac{1}{\rho}.
\end{aligned}
$$

Extrayons la racine carrée, nous aurons

$$
\begin{aligned}
55)\qquad AA'=ds&-\frac{ds^3}{24\rho^2}-\frac{ds^3}{24\rho}d\frac{1}{\rho}+\frac{ds^5}{240\rho^2}\left(\frac{1}{8\rho^2}+\frac{11}{3r^2}\right)\\
&-\frac{ds^3}{90}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2-\frac{ds^3}{80\rho}d^2\frac{1}{\rho}+\frac{ds^5}{960\rho^3}d\frac{1}{\rho}\\
&+\frac{ds^5}{720r\rho}\left(\frac{1}{r}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}d\frac{1}{r}\right)-\frac{ds^3}{144}d\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{\rho}-\frac{ds^3}{360\rho}d^3\frac{1}{\rho}.
\end{aligned}
$$

Cherchons, en troisième lieu, l'angle V de la binormale en un point A avec la normale principale en un point A' infiniment voisin. On a

$$\cos V = \cos\lambda \cos\xi' + \cos\mu \cos\eta' + \cos\nu \cos\zeta',$$

et, par la formule de Taylor,

$$\begin{aligned}\cos V = {} & \cos\lambda\cos\xi + \cos\mu\cos\eta + \cos\nu\cos\zeta + \cos\lambda\, d\cos\xi + \cos\mu\, d\cos\eta \\ & + \cos\nu\, d\cos\zeta + \frac{1}{1.2}(\cos\lambda\, d^2\cos\xi + \cos\mu\, d^2\cos\eta + \cos\nu\, d^2\cos\zeta) + \ldots\end{aligned}$$

Remplaçons $\cos\lambda \cos\xi + \cos\mu \cos\eta + \cos\nu \cos\zeta$ par zéro, et les différentielles successives de $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ par les valeurs du n° 7, nous aurons

$$\begin{aligned}(56)\qquad \cos V = {} & -\frac{ds}{r} - \frac{ds}{2} d\frac{1}{r} + \frac{ds}{6}\left[\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) - d^2\frac{1}{r}\right] \\ & + \frac{ds}{24}\left\{ds^2\left[\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{6}{r^2}\right) d\frac{1}{r} + \frac{5}{r\rho} d\frac{1}{\rho}\right] - d^3\frac{1}{r}\right\} \\ & + \frac{ds}{120}\left\{ds^2\left[-\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)^2 + \frac{8}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 + \frac{15}{r}\left(d\frac{1}{r}\right)^2\right.\right. \\ & \qquad\qquad \left.\left. + \frac{1}{\rho^2} d^2\frac{1}{r} + \frac{10}{r^2} d^2\frac{1}{r} + \frac{9}{r\rho} d^2\frac{1}{\rho} + \frac{7}{\rho} d\frac{1}{r} d\frac{1}{\rho}\right] - d^4\frac{1}{r}\right\} \\ & + \frac{ds}{720}\left\{ds^2\left[-ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\rho^2} d\frac{1}{r} + \frac{14}{r\rho} d\frac{1}{\rho} + \frac{15}{r^2} d\frac{1}{r}\right)\right.\right. \\ & \qquad + \frac{35}{r} d\frac{1}{\rho} d^2\frac{1}{\rho} + \frac{60}{r} d\frac{1}{r} d^2\frac{1}{r} \\ & \qquad + 15 d\frac{1}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 + 16\left(d\frac{1}{r}\right)^3 + \frac{9}{\rho} d\frac{1}{\rho} d^2\frac{1}{r} \\ & \qquad \left.\left. + \frac{16}{\rho} d\frac{1}{r} d^2\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{15}{r^2}\right) d^3\frac{1}{r} + \frac{14}{r\rho} d^3\frac{1}{\rho}\right] - d^5\frac{1}{r}\right\}.\end{aligned}$$

Cherchons, en dernier lieu, l'angle W de la normale principale en un point A avec la normale principale en un point A' infiniment voisin. On a

$$\cos W = \cos\xi \cos\xi' + \cos\eta \cos\eta' + \cos\zeta \cos\zeta',$$

et, par la formule de Taylor,

$$\begin{aligned}\cos W = {} & \cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta + \cos\xi \, d\cos\xi + \cos\eta \, d\cos\eta \\ & + \cos\zeta \, d\cos\zeta + \frac{1}{1.2}(\cos\xi \, d^2\cos\xi + \cos\eta \, d^2\cos\eta + \cos\zeta \, d^2\cos\zeta) + \ldots\end{aligned}$$

Remplaçons $\cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta$ par l'unité, et les différentielles successives de $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ par les valeurs du n° 7, nous aurons

$$\begin{aligned}
(57) \quad \cos W = {} & 1 - \frac{ds^2}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{ds^2}{2}\left(\frac{1}{\rho} d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} d\frac{1}{r}\right) \\
& + \frac{ds^2}{24}\left[ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\rho} d^2\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} d^2\frac{1}{r}\right) - 3\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 - 3\left(d\frac{1}{r}\right)^2\right] \\
& + \frac{ds^2}{24}\left[2\,ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\rho} d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} d\frac{1}{r}\right)\right. \\
& \qquad \left. - 2\left(d\frac{1}{\rho} d^2\frac{1}{\rho} + d\frac{1}{r} d^2\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{\rho} d^3\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} d^3\frac{1}{r}\right] \\
& + \frac{ds^2}{720}\left\{ds^2\left[-ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)^3 + \left(\frac{45}{\rho^2} + \frac{18}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2\right.\right. \\
& \qquad + \frac{54}{r\rho} d\frac{1}{r} d\frac{1}{\rho} + \left(\frac{18}{\rho^2} + \frac{45}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{r}\right)^2 \\
& \qquad \left. + 20\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\rho} d^2\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} d^2\frac{1}{r}\right)\right] \\
& \qquad - 10\left(d^2\frac{1}{\rho}\right)^2 - 10\left(d^2\frac{1}{r}\right)^2 - 15\, d\frac{1}{\rho} d^3\frac{1}{\rho} \\
& \qquad \left. - 15\, d\frac{1}{r} d^3\frac{1}{r} - \frac{6}{\rho} d^4\frac{1}{\rho} - \frac{6}{r} d^4\frac{1}{r}\right\}.
\end{aligned}$$

IV. — *Formules de M. Laguerre.*

9. Considérons une courbe tracée sur une surface quelconque, et soient, comme au n° 6, α, β, γ, ξ, η, ζ, λ, μ, ν les angles que font avec les axes les arêtes du trièdre lié à la courbe ; soient de même, comme au n° 4, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', les cosinus des angles que font avec les axes les arêtes du trièdre lié à la surface. La position relative

des deux trièdres sera déterminée par l'angle i de la droite AT avec la droite AX et par l'angle ϖ de la droite AN avec la droite AZ; de sorte que, en appliquant les formules d'Euler, on aura

$$(58)\quad\left\{\begin{aligned}
&a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=\cos i,\\
&a'\cos\alpha+b'\cos\beta+c'\cos\gamma=\sin i,\\
&a''\cos\alpha+b''\cos\beta+c''\cos\gamma=0;\\
&a\cos\xi+b\cos\eta+c\cos\zeta=\sin\varpi\sin i,\\
&a'\cos\xi+b'\cos\eta+c'\cos\zeta=-\sin\varpi\cos i,\\
&a''\cos\xi+b''\cos\eta+c''\cos\zeta=\cos\varpi;\\
&a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu=-\cos\varpi\sin i,\\
&a'\cos\lambda+b'\cos\mu+c'\cos\nu=\cos\varpi\cos i,\\
&a''\cos\lambda+b''\cos\mu+c''\cos\nu=\sin\varpi.
\end{aligned}\right.$$

Différentions ces neuf équations, remplaçons da, db, dc, da', db', dc', da'', db'', dc'' par leurs valeurs (14), $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, $d\cos\xi$, $d\cos\eta$, $d\cos\zeta$, $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$ par leurs valeurs (49), enfin tenons compte des équations (58); les neuf équations provenant de la différentiation se réduiront à trois distinctes :

$$(59)\quad\left\{\begin{aligned}
&d\varpi-\frac{ds}{r}=(P\,du+S\,dv)\sin i+(R\,du+Q\,dv)\cos i,\\
&\frac{ds}{\rho}\cos\varpi=(P\,du+S\,dv)\cos i-(R\,du+Q\,dv)\sin i,\\
&-\frac{ds}{\rho}\sin\varpi=di+M\,du+N\,dv.
\end{aligned}\right.$$

Ce sont les formules de M. Laguerre. Quant à l'angle i, il est lié à u et à v par les formules

$$(60)\qquad ds\cos i=E\,du,\quad ds\sin i=G\,dv,$$

si les coordonnées sont rectangulaires; par les formules

$$(60)'\qquad ds\cos i=(E\,du+G\,dv)\cos\omega,\quad ds\sin i=(E\,du-G\,dv)\sin\omega,$$

si les coordonnées sont obliques.

Des formules (38) et (60), (38)' et (60)', on déduit les suivantes :

$$(61)\quad \begin{cases} du = \dfrac{ds\cos i}{E}, \\ dv = \dfrac{ds\sin i}{G}, \\ \dfrac{E}{G} = \dfrac{R}{-S}, \\ \dfrac{du}{dv} = \dfrac{G\cos i}{E\sin i} = \dfrac{-S\cos i}{R\sin i}, \\ \dfrac{\sin i}{\cos i} = \dfrac{G\,dv}{E\,du} = \dfrac{-S\,dv}{R\,du}; \end{cases}$$

$$(61)'\quad \begin{cases} du = \dfrac{ds\sin(\omega+i)}{E\sin 2\omega}, \\ dv = \dfrac{ds\sin(\omega-i)}{G\sin 2\omega}, \\ \dfrac{E}{G} = \dfrac{P\cos\omega+R\sin\omega}{S\cos\omega-Q\sin\omega}, \\ \dfrac{du}{dv} = \dfrac{G\sin(\omega+i)}{E\sin(\omega-i)} = \dfrac{S\cos\omega-Q\sin\omega}{P\cos\omega+R\sin\omega}\,\dfrac{\sin(\omega+i)}{\sin(\omega-i)}, \\ \dfrac{\sin i}{\cos i} = \dfrac{E\,du-G\,dv}{E\,du+G\,dv}\,\dfrac{\sin\omega}{\cos\omega} \\ \qquad = \dfrac{(P\cos\omega+R\sin\omega)\,du-(S\cos\omega-Q\sin\omega)\,dv}{(P\cos\omega+R\sin\omega)\,du+(S\cos\omega-Q\sin\omega)\,dv}\,\dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}; \end{cases}$$

qui nous serviront pour des transformations ultérieures.

SECTION II.

ÉTUDE D'UNE SURFACE AUTOUR D'UN DE SES POINTS.

I. — *Théorème d'Euler.*

10. Considérons une série de courbes issues d'un point A d'une surface et dont les plans osculateur scontiennent la normale en A; leurs

rayons de courbure seront liés à leurs directions par la deuxième des équations (59), où $\cos\varpi$ est remplacé par l'unité :

$$(62)\qquad \frac{ds}{\rho} = (P\,du + S\,dv)\cos i - (R\,du + Q\,dv)\sin i.$$

Éliminons du et dv à l'aide des équations (61) et (61)', et divisons par ds; nous aurons

$$(63)\qquad \frac{EG}{\rho} = GP\cos^2 i + (ES - GR)\sin i\cos i - EQ\sin^2 i,$$

et

$$(63)'\qquad \begin{aligned}\frac{EG\sin 2\omega}{\rho} = {} & (ES + GP)\sin\omega\cos^2 i \\ & - [(ES - GP)\cos\omega + (GR + EQ)\sin\omega]\sin i\cos \\ & - (GR - EQ)\cos\omega\sin^2 i.\end{aligned}$$

Or on sait, par l'algèbre élémentaire, que le second membre de ces équations est susceptible d'un maximum et d'un minimum pour les deux valeurs de l'angle i données par la formule

$$(64)\qquad \tang 2\alpha = \frac{ES - GR}{GP + EQ},$$

et par la suivante

$$(64)'\qquad \tang 2\alpha = -\frac{(ES - GP)\cos\omega + (GR + EQ)\sin\omega}{(ES + GP)\sin\omega + (GR - EQ)\cos\omega}.$$

Soient ρ_1 et ρ_2 les valeurs de ρ déduites de l'équation (63) ou de l'équation (63)', lorsqu'on y remplace i par les valeurs de α tirées de l'équation (64) ou de l'équation (64)'; on a

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{EG}{\rho_1} &= GP\cos^2\alpha + (ES - GR)\sin\alpha\cos\alpha - EQ\sin^2\alpha, \\ \frac{EG}{\rho_2} &= GP\sin^2\alpha - (ES - GR)\sin\alpha\cos\alpha - EQ\cos^2\alpha,\end{aligned}\right.$$

et

$$(65)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{EG \sin 2\omega}{\rho_1} &= (ES + GP) \sin\omega \cos^2\alpha \\ &\quad - [(ES - GP)\cos\omega + (GR + EQ)\sin\omega] \sin\alpha\cos\alpha \\ &\quad - (GR - EQ)\cos\omega \sin^2\alpha, \\ \frac{EG \sin 2\omega}{\rho_2} &= (ES + GP) \sin\omega \sin^2\alpha \\ &\quad + [(ES - GP)\cos\omega + (GR + EQ)\sin\omega] \sin\alpha\cos\alpha \\ &\quad - (GR - EQ)\cos\omega \cos^2\alpha. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(66) \qquad i = \alpha + \theta$$

dans les équations (63) et (63)′; multiplions respectivement par $\cos^2\theta$ et par $\sin^2\theta$ la première et la seconde des équations (65) et (65)′, et ajoutons-les membre à membre avec les équations (63) et (63)′; nous aurons, en tenant compte des relations (64) et (64)′,

$$(67) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\theta}{\rho_1} + \frac{\sin^2\theta}{\rho_2}.$$

C'est la formule d'Euler. On donne le nom de *sections principales* à celles qui correspondent aux rayons de courbure ρ_1 et ρ_2, et dont les directions sont données par l'une des formules (64) ou (64)′.

II. — *Théorème de Gauss.*

11. Il reste à calculer les rayons de courbure principaux ρ_1 et ρ_2. A cet effet, éliminons α entre les équations (64), (64)′ et les équations (63), (63)′, où l'on remplace préalablement i par α; les valeurs cherchées seront fournies par l'équation du second degré

$$(68) \qquad \frac{1}{\rho^2} - \frac{GP - EQ}{EG}\frac{1}{\rho} + \frac{RS - PQ}{EG} = 0,$$

ou par la suivante

$$(68)' \qquad \frac{1}{\rho^2} - \frac{(ES + GP)\sin\omega - (GR - EQ)\cos\omega}{EG \sin 2\omega}\frac{1}{\rho} - \frac{RS - PQ}{EG \sin 2\omega} = 0.$$

On en tire

$$(69)\qquad \frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{RS - PQ}{EG}, \qquad (69)'\quad \frac{1}{\rho_1\rho_2} = -\frac{RS - PQ}{EG\sin 2\omega},$$

et, en remplaçant RS — PQ par sa valeur tirée de la première des équations (19),

$$(70)\qquad \frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{\dfrac{dM}{dv} - \dfrac{dN}{du}}{EG}, \qquad (70)'\quad \frac{1}{\rho_1\rho_2} = -\frac{\dfrac{dM}{dv} - \dfrac{dN}{du}}{EG\sin 2\omega}.$$

Mais les formules (38) et (38)$'$ donnent

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned} M &= -\frac{1}{G}\frac{dE}{dv}, \\ N &= +\frac{1}{E}\frac{dG}{du}, \end{aligned}\right. \qquad (71)'\quad \left\{\begin{aligned} M &= +\frac{d\omega}{du} + \frac{1}{G\sin 2\omega}\left(\frac{dE}{dv} - \cos 2\omega\,\frac{dG}{du}\right), \\ N &= -\frac{d\omega}{dv} - \frac{1}{E\sin 2\omega}\left(\frac{dG}{du} - \cos 2\omega\,\frac{dE}{dv}\right); \end{aligned}\right.$$

on a donc, en définitive,

$$(72)\qquad \frac{EG}{\rho_1\rho_2} = -\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{G}\frac{dE}{dv}\right) - \frac{d}{du}\left(\frac{1}{E}\frac{dG}{du}\right),$$

ou

$$(72)'\qquad \begin{aligned} \frac{EG\sin 2\omega}{\rho_1\rho_2} = &-\frac{d}{dv}\left[\frac{d\omega}{du} + \frac{1}{G\sin 2\omega}\left(\frac{dE}{dv} - \cos 2\omega\,\frac{dG}{du}\right)\right] \\ &-\frac{d}{du}\left[\frac{d\omega}{dv} + \frac{1}{E\sin 2\omega}\left(\frac{dG}{du} - \cos 2\omega\,\frac{dE}{dv}\right)\right]. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'expression $\frac{1}{\rho_1\rho_2}$ ne dépend que de E, G et ω, et conserve sa valeur dans les déformations de la surface qui n'altèrent pas ces trois fonctions. C'est le théorème de Gauss, qui a désigné cette expression sous le nom de *courbure sphérique* de la surface.

III. — *Théorème de Meusnier.*

12. Les rayons de courbure de toutes les sections normales d'une surface en un point étant connus, proposons-nous de trouver les rayons de courbure des sections obliques.

Le plan osculateur de la courbe considérée coupant le plan tangent

à la surface en A suivant une droite AT, si l'on désigne par i l'angle que fait AT avec la droite AX, par ϖ l'angle de la normale principale de la courbe avec la normale à la surface, par ρ' le rayon de courbure cherché, la deuxième des équations (59), traitée comme au n° **10**, donne, par comparaison avec les équations (63) et (63)',

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos\varpi}{\rho'} \quad \text{ou} \quad \rho' = \rho\cos\varpi. \tag{73}$$

Le rayon de courbure de la section oblique est la projection, sur le plan de cette section, du rayon de courbure de la section normale tangente à la section oblique.

Ce théorème, dû à Meusnier, complète l'étude de la courbure au voisinage d'un point.

IV. — *Torsion géodésique.*

13. Occupons-nous maintenant de la distribution des normales. A cet effet, et pour profiter des formules du n° **7**, considérons, à partir d'un point, les courbes dont les normales principales coïncident avec celles de la surface. Ces courbes, qu'on appelle *géodésiques*, ayant en tous leurs points leur plan osculateur normal à la surface, satisfont à l'équation différentielle

$$di + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv = 0, \tag{74}$$

obtenue en faisant $\sin\varpi = 0$ dans la troisième des formules (59). Cette équation montre qu'on peut se donner arbitrairement du et dv, ou $\tang i$, et qu'alors di est déterminé. On en conclut que, par un point, passent une infinité de géodésiques, dont chacune est déterminée par sa tangente en ce point.

14. Proposons-nous de trouver l'angle formé par la normale à la surface en un point $(u + du, v + dv)$ avec le plan normal à la surface au point (u, v), dont la direction est déterminée par le rapport de du à dv. Pour cela, faisons passer une géodésique par les points (u, v), $(u + du, v + dv)$; elle sera, d'après ce qui précède, tangente au plan normal en (u, v), et l'angle cherché sera le complément de celui dési-

gné par V au n° 8, et dont la formule (56) donne le développement. En le désignant par t, et en se limitant aux termes du premier ordre, on aura donc

$$(75)\qquad t = -\frac{ds}{r}.$$

D'autre part, la première des formules (59) donne, en y faisant $d\varpi = 0$,

$$(76)\qquad -\frac{ds}{r} = (P\,du + S\,dv)\sin i + (R\,du + Q\,dv)\cos i,$$

d'où

$$(77)\qquad t = (P\,du + S\,dv)\sin i + (R\,du + Q\,dv)\cos i.$$

Remplaçons du et dv par leurs valeurs (61) et (61)', il viendra

$$(78)\qquad t = \frac{ds}{EG}[ES\sin^2 i + (GP + EQ)\sin i\cos i + GR\cos^2 i],$$

$$(78)'\qquad t = \frac{ds}{EG\sin 2\omega}\Big\{-(ES - GP)\cos\omega\sin^2 i + [(ES + GP)\sin\omega + (GR - EQ)\cos\omega]\sin i\cos i + (GR + EQ)\sin\omega\cos^2 i\Big\},$$

ou, en vertu des formules (38) et (38)', (64) et (64)',

$$(79)\qquad t = -ds\frac{R}{E\sin 2\alpha}\sin 2(i - \alpha),$$

$$(79)'\qquad t = -ds\frac{(GR + EQ)\sin\omega}{EG\sin 2\omega\sin 2\alpha}\sin 2(i - \alpha).$$

Or, en retranchant membre à membre les formules (65) et (65)', et en tenant compte également des formules (38) et (38)', (64) et (64)', on a

$$(80)\qquad E\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = -\frac{2R}{\sin 2\alpha},$$

$$(80)'\qquad EG\sin 2\omega\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = -\frac{2(GR + EQ)\sin\omega}{\sin 2\alpha};$$

donc, par comparaison avec les formules (79) et (79)',

$$t = \frac{ds}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\sin 2(i-\alpha). \tag{81}$$

Cette formule et l'introduction, dans la théorie des surfaces, du rapport $\frac{t}{ds}$, appelé *torsion géodésique* par M. Ossian Bonnet, sont dus à M. Bertrand.

On voit que la torsion géodésique est nulle suivant les sections principales, et qu'elle a même valeur, au signe près, pour deux directions rectangulaires.

15. Au lieu de faire passer une géodésique par les points (u, v), $(u + du, v + dv)$, faisons passer une courbe quelconque tangente au plan normal en (u, v). La première des formules (59), appliquée à cette courbe, donnera, par comparaison avec l'équation (77), cette nouvelle expression de la torsion géodésique

$$t = d\varpi - \frac{ds}{r}, \tag{82}$$

due à M. Ossian Bonnet, et qui a d'importantes conséquences.

V. — *Angle de deux normales infiniment voisines.*

16. Proposons-nous de trouver l'angle formé par les normales en deux points infiniment voisins (u, v), $(u + du, v + dv)$. Si l'on fait passer une géodésique par ces deux points, cet angle ne différera pas de celui désigné par W au n° 8, et dont la formule (57) donne le développement. En le désignant par n, et en se limitant aux termes du premier ordre, on aura donc

$$n^2 = ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right),$$

ou, en remplaçant $\frac{ds}{r}$ par sa valeur tirée de l'équation (81) et $\frac{ds}{\rho}$ par sa valeur tirée de l'équation (67),

$$n^2 = ds^2\left[\frac{\cos^2(i-\alpha)}{\rho_1^2} + \frac{\sin^2(i-\alpha)}{\rho_2^2}\right]. \tag{83}$$

On peut remarquer que les deux premières formules (59) donnent, pour la géodésique considérée,

$$-\frac{ds}{r} = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\sin i + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos i,$$

$$\frac{ds}{\rho} = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos i - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\sin i,$$

d'où, en élevant au carré et ajoutant,

$$n^2 = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)^2 + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)^2. \tag{84}$$

Éliminons du et dv à l'aide des relations (60) et (60)', il viendra

$$n^2 = ds^2\left(\frac{\mathrm{P}^2+\mathrm{R}^2}{\mathrm{E}^2}\cos^2 i + 2\,\frac{\mathrm{PS}+\mathrm{RQ}}{\mathrm{EG}}\sin i\cos i + \frac{\mathrm{S}^2+\mathrm{Q}^2}{\mathrm{G}^2}\sin i\right), \tag{85}$$

$$n^2 = \frac{ds^2}{\sin^2 2\omega}\left[\frac{\mathrm{P}^2+\mathrm{R}^2}{\mathrm{E}^2}\sin^2(\omega+i) + 2\,\frac{\mathrm{PS}+\mathrm{RQ}}{\mathrm{EG}}\sin(\omega+i)\sin(\omega-i) + \frac{\mathrm{S}^2+\mathrm{Q}^2}{\mathrm{G}^2}\sin^2(\omega-i)\right]. \tag{85'}$$

Enfin, si l'on fait passer par les deux points (u, v), $(u+du, v+dv)$ une courbe quelconque, les équations (59), appliquées à cette courbe, donneront, par comparaison avec l'équation (84), cette nouvelle expression

$$n^2 = \left(d\varpi - \frac{ds}{r}\right)^2 + ds^2\,\frac{\cos^2\varpi}{\rho^2}, \tag{86}$$

due à M. Ossian Bonnet.

VI. — *Courbure géodésique.*

17. Une ligne quelconque étant tracée sur une surface, si l'on projette la courbure de la ligne sur le plan tangent à la surface en un point A de cette ligne, on obtient une dernière expression $\frac{\sin\varpi}{\rho}$ relative à la forme qu'affecte une surface autour d'un de ses points, et dont M. Ossian Bonnet a, le premier, signalé toute l'importance. Cette expression, nulle en tous les points d'une géodésique, a été désignée par M. Liouville sous le nom de *courbure géodésique;* nous allons en calculer l'expression dans le cas d'une courbe quelconque.

De la troisième des formules (59)

$$(87) \qquad -\frac{ds}{\rho}\sin\varpi = di + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv,$$

on déduit, en remplaçant M et N par leurs valeurs (71) et (71)$'$, du et dv par leurs valeurs (60) et (60)$'$,

$$(88) \qquad \frac{\sin\varpi}{\rho} = -\frac{di}{ds} + \frac{\frac{d\mathrm{E}}{dv}}{\mathrm{EG}}\cos i - \frac{\frac{d\mathrm{G}}{du}}{\mathrm{EG}}\sin i,$$

$$(88)' \qquad \frac{\sin\varpi}{\rho} = -\frac{di}{ds} - \left[\frac{d\omega}{du} + \frac{1}{\mathrm{G}\sin 2\omega}\left(\frac{d\mathrm{E}}{dv} - \cos 2\omega\frac{d\mathrm{G}}{du}\right)\right]\frac{\sin(\omega+i)}{\mathrm{E}\sin 2\omega}$$
$$+ \left[\frac{d\omega}{dv} + \frac{1}{\mathrm{E}\sin 2\omega}\left(\frac{d\mathrm{G}}{du} - \cos 2\omega\frac{d\mathrm{E}}{dv}\right)\right]\frac{\sin(\omega-i)}{\mathrm{G}\sin 2\omega}.$$

Il en résulte que l'expression $\frac{\sin\varpi}{\rho}$ ne dépend que de E, G et ω, et conserve sa valeur dans les déformations de la surface qui n'altèrent pas ces trois fonctions. En particulier, si l'on circonscrit à la surface une développable le long de la courbe considérée, sa courbure géodésique sera égale à la courbure de sa transformée par développement.

A l'aide des deux premières formules (61) et (61)$'$, les expressions (88) et (88)$'$ prennent la forme remarquable suivante, due à M. Ossian Bonnet,

$$(89) \qquad \mathrm{EG}\frac{\sin\varpi}{\rho} = \frac{d.\mathrm{E}\cos i}{dv} - \frac{d.\mathrm{G}\sin i}{du},$$

$$(89)' \qquad \mathrm{EG}\sin 2\omega\frac{\sin\varpi}{\rho} = \frac{d.\mathrm{G}\cos(\omega+i)}{du} - \frac{d.\mathrm{E}\cos(\omega-i)}{dv}.$$

SECTION III.

LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

I. — *Lignes de courbure.*

18. On nomme ligne de courbure d'une surface une ligne située sur cette surface et tangente en chacun de ses points à l'une des sections principales. Comme il passe, en chaque point de la surface, deux sections principales perpendiculaires l'une à l'autre, il passe aussi, en chaque point, deux lignes de courbure tangentes à ces sections et rectangulaires. Les lignes de courbure d'une surface forment donc deux systèmes orthogonaux dont chacun recouvre entièrement la surface.

19. Il résulte de là que les équations (64) et (64)′ sont, en y remplaçant α par i, celles des lignes de courbure :

$$\tag{90} \operatorname{tang} 2i = \frac{\mathrm{ES} - \mathrm{GR}}{\mathrm{GP} + \mathrm{EQ}},$$

$$\tag{90'} \operatorname{tang} 2i = -\frac{(\mathrm{ES} - \mathrm{GP})\cos\omega + (\mathrm{GR} + \mathrm{EQ})\sin\omega}{(\mathrm{ES} + \mathrm{GP})\sin\omega + (\mathrm{GR} - \mathrm{EQ})\cos\omega}.$$

En développant, et en tenant compte de la quatrième des équations (61) et (61)′, elles prennent la forme

$$\tag{91} (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\sin i + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos i = 0.$$

Par comparaison avec la première des équations (59), on en conclut

$$d\varpi - \frac{ds}{r} = 0,$$

et, réciproquement, on conclut de cette dernière l'équation (91). On peut donc énoncer le théorème suivant, dû à Lancret :

L'angle de torsion d'une ligne de courbure d'une surface est la différentielle de l'angle que fait avec la surface le plan osculateur de la ligne de courbure.

ptotiques sont imaginaires, est dite *convexe;* elle est dite *à courbures opposées*, lorsque les lignes asymptotiques sont réelles.

22. Considérons sur une surface une courbe dont le plan osculateur en un de ses points A contienne la tangente à l'une des asymptotiques qui passent par ce point. La deuxième des équations (59), appliquée à cette courbe, donnera

$$\frac{\cos\varpi}{\rho} = 0,$$

et, réciproquement, si cette équation est satisfaite en un des points de la courbe, c'est que le plan osculateur en ce point contient la tangente à l'une des asymptotiques qui y passent. On en conclut que :

Toute ligne dont le plan osculateur en un point A *contient la tangente à l'une des asymptotiques qui passent par ce point, sans être tangent à la surface, a en ce point* A *un rayon de courbure infini.*

Toute ligne tracée sur une surface, et qui a, en un de ses points A, *un rayon de courbure infini, est tangente en ce point à l'une des asymptotiques qui y passent.*

Toute ligne, dont le plan osculateur en un point A *est tangent à la surface en ce point, est elle-même tangente en ce point à l'une des asymptotiques qui y passent.*

En particulier, *une courbe tracée sur une surface ou portion de surface convexe ne peut avoir aucun de ses plans osculateurs tangent à la surface.*

Toute ligne dont le plan osculateur en un point A *contient la tangente à l'une des asymptotiques qui passent par ce point, sans avoir en ce point son rayon de courbure infini, a son plan osculateur tangent en* A *à la surface.*

III. — *Lignes géodésiques.*

23. Nous avons donné, au n° **13**, la définition et l'équation différentielle des lignes géodésiques, et nous avons fait voir que par un point passent une infinité de géodésiques, dont chacune est déterminée par sa tangente en ce point. Au n° **17**, nous avons remarqué que la courbure géodésique d'une géodésique était nulle. Nous allons démontrer maintenant une importante propriété de ces lignes.

De l'équation différentielle

$$di + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv = 0$$

on déduit, à l'aide des formules (71),

$$\mathrm{G}\,di - \frac{d\mathrm{E}}{dv}\,du + \frac{d\mathrm{G}}{du}\,\frac{\mathrm{G}\,dv}{\mathrm{E}} = 0,$$

ou, en introduisant $\tang i$,

$$\mathrm{G}\cos i\,di - \frac{d\mathrm{E}}{dv}\cos i\,du + \frac{d\mathrm{G}}{du}\sin i\,du = 0,$$

ou encore

$$\mathrm{G}\cos i\,di + \sin i\,\frac{d\mathrm{G}}{du}\,du = \frac{\mathrm{E}\,\frac{d\mathrm{E}}{dv}\,du^2}{ds}.$$

Ajoutons $\sin i\,\frac{d\mathrm{G}}{dv}\,dv$ aux deux membres, il vient

$$\mathrm{G}\cos i\,di + \sin i\left(\frac{d\mathrm{G}}{du}\,du + \frac{d\mathrm{G}}{dv}\,dv\right) = \frac{\mathrm{E}\,\frac{d\mathrm{E}}{dv}\,du^2 + \mathrm{G}\,\frac{d\mathrm{G}}{dv}\,dv^2}{ds},$$

c'est-à-dire

$$d.\mathrm{G}\sin i = \frac{\mathrm{E}\,\frac{d\mathrm{E}}{dv}\,du^2 + \mathrm{G}\,\frac{d\mathrm{G}}{dv}\,dv^2}{ds},$$

ou

$$d\,\frac{\mathrm{G}^2\,dv}{ds} = \frac{\mathrm{E}\,\frac{d\mathrm{E}}{dv}\,du^2 + \mathrm{G}\,\frac{d\mathrm{G}}{dv}\,dv^2}{ds}.$$

Or, si l'on considère une courbe quelconque tracée sur la surface, ce qui rend v fonction de u, on a, pour la longueur de cette courbe comprise entre deux points u_1 et u_2,

$$\mathrm{S} = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\mathrm{E}^2\,du^2 + \mathrm{G}^2\,dv^2},$$

et, si l'on fait varier la courbe,

$$\delta\mathrm{S} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\delta(\mathrm{E}^2\,du^2 + \mathrm{G}^2\,dv^2)}{2\,ds}.$$

Effectuant la variation, il vient

$$\delta S = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\left(E\frac{dE}{dv}\,du^2 + G\frac{dG}{dv}\,dv^2\right)\delta v}{ds} + \int_{u_1}^{u_2} \frac{G^2 dv}{ds}\,d\delta v;$$

d'où, en intégrant le second terme par parties et négligeant ce qui se rapporte aux limites, puisqu'elles sont fixes,

$$\delta S = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\left(E\frac{dE}{dv}\,du^2 + G\frac{dG}{dv}\,dv^2\right)\delta v}{ds} - \int_{u_1}^{u_2} d\,\frac{G^2 dv}{ds}\,\delta v$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{E\frac{dE}{dv}\,du^2 + G\frac{dG}{dv}\,dv^2}{ds} - d\,\frac{G^2 dv}{ds}\right)\delta v.$$

Il en résulte que, pour une géodésique, la variation δS est nulle, en se bornant aux termes du premier ordre; donc

La ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur une surface entre deux points donnés est une géodésique.

24. Les formules (89), (89)', auxquelles nous sommes arrivé au n° **17**, nous donnent ces deux nouvelles équations des lignes géodésiques

$$\frac{d.E\cos i}{dv} = \frac{d.G\cos i}{du}, \tag{95}$$

$$\frac{d.E\cos(\omega - i)}{dv} = \frac{d.G\cos(\omega + i)}{du}. \tag{95'}$$

Elles prouvent que, si, par un moyen quelconque, on a obtenu une intégrale première de ces équations du second ordre, on peut, par de simples quadratures, arriver à l'équation en termes finis.

En effet, l'intégrale première est une fonction de u, v, $\frac{dv}{du}$ et d'une constante arbitraire α, ou, ce qui revient au même, de u, v, i et d'une constante arbitraire α

$$F(u, v, i, \alpha) = 0.$$

Tirons i de cette équation et portons sa valeur dans l'une ou l'autre des équations (95), (95)'; cette équation sera identiquement satisfaite, quel que soit α. Donc la dérivée par rapport à α du résultat de cette substitution devra être égale à zéro, et l'on aura, en intervertissant l'ordre des différentiations,

$$\frac{d}{dv}\left[\mathrm{E}\sin(\omega-i)\frac{di}{d\alpha}\right]=\frac{d}{du}\left[-\mathrm{G}\sin(\omega+i)\frac{di}{d\alpha}\right],$$

quelque soit α; ce qui prouve que l'expression

$$\mathrm{E}\sin(\omega-i)\frac{di}{d\alpha}\,du-\mathrm{G}\sin(\omega+i)\frac{di}{d\alpha}\,dv$$

est une différentielle exacte. Mais l'équation $\mathrm{F}(u,v,i,\alpha)=0$ obtenue, que reste-t-il à faire? Il faut intégrer l'équation qui fait connaître i en fonction de $\frac{dv}{du}$,

$$\frac{\sin(\omega+i)}{\mathrm{E}\,du}=\frac{\sin(\omega-i)}{\mathrm{G}\,dv}\quad\text{ou}\quad \mathrm{E}\sin(\omega-i)\,du-\mathrm{G}\sin(\omega+i)\,dv=0,$$

et éliminer i entre le résultat de cette intégration et l'équation

$$\mathrm{F}(u,v,i,\alpha)=0.$$

Or, d'après ce qui précède, le facteur intégrant du premier membre est $\frac{di}{d\alpha}$, et il est connu : la question est donc bien ramenée aux quadratures.

C'est M. Ossian Bonnet qui a démontré qu'on pouvait ainsi rattacher ce résultat à la célèbre théorie du dernier multiplicateur de Jacobi.

SECTION IV.

SURFACES GAUCHES LIEUX DE NORMALES.

I. — *Élément d'arc.*

25. Les surfaces gauches formées par les normales à une surface le long d'une ligne tracée sur cette surface jouent un rôle important dans l'étude qui nous occupe. Pour abréger, nous les appellerons *normalies*, du nom proposé par M. Mannheim dans son *Étude sur le déplacement d'une figure*.

Considérons une courbe tracée sur une surface, et soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point A de la courbe, l, m, n les angles de la normale en A à la surface avec les axes; les équations de cette normale sont

$$\frac{X-x}{\cos l}=\frac{Y-y}{\cos m}=\frac{Z-z}{\cos n}=L,$$

L désignant la distance qui sépare le point (x, y, z) du point (X, Y, Z). Soient, comme précédemment (6), α, β, γ les angles de la tangente en A à la courbe avec les axes, ξ, η, ζ ceux de la normale principale, λ, μ, ν ceux de la binormale; on a (9)

$$(96)\qquad \left\{\begin{aligned}&\cos\alpha\cos l+\cos\beta\cos m+\cos\gamma\cos n=0,\\&\cos\xi\cos l+\cos\eta\cos m+\cos\zeta\cos n=\cos\varpi,\\&\cos\lambda\cos l+\cos\mu\cos m+\cos\nu\cos n=\sin\varpi.\end{aligned}\right.$$

Des équations de la normale, on tire

$$X=x+L\cos l,\quad Y=y+L\cos m,\quad Z=z+L\cos n,$$

et, en différentiant,

$$\begin{aligned}dX&=dx+\cos l\,dL+L\,d\cos l,\\dY&=dy+\cos m\,dL+L\,d\cos m,\\dZ&=dz+\cos n\,dL+L\,d\cos n.\end{aligned}$$

Élevons ces équations au carré, et ajoutons-les membre à membre, nous aurons

$$\begin{aligned} d\sigma^2 = ds^2 + dL^2 + L^2[(d\cos l)^2 + (d\cos m)^2 + (d\cos n)^2] \\ + 2\,dL\,(dx\cos l + dy\cos m + dz\cos n) \\ + 2\,L\,(dx\,d\cos l + dy\,d\cos m + dz\,d\cos n) \\ + 2\,L\,dL\,(\cos l\,d\cos l + \cos m\,d\cos m + \cos n\,d\cos n), \end{aligned}$$

$d\sigma^2$ étant l'élément d'arc de la normalie et ds^2 celui de sa courbe directrice.

De l'équation

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1,$$

on tire

$$\cos l\,d\cos l + \cos m\,d\cos m + \cos n\,d\cos n = 0.$$

En remplaçant dx, dy et dz par $ds\cos\alpha$, $ds\cos\beta$ et $ds\cos\gamma$, on a

$$\begin{aligned} & dx\,d\cos l + dy\,d\cos m + dz\,d\cos n \\ & \quad = ds(\cos\alpha\,d\cos l + \cos\beta\,d\cos m + \cos\gamma\,d\cos n), \\ & dx\cos l + dy\cos m + dz\cos n = ds(\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n). \end{aligned}$$

La première des équations (96) donne donc

$$dx\cos l + dy\cos m + dz\cos n = 0,$$

et différentiée

$$\begin{aligned} & \cos\alpha\,d\cos l + \cos\beta\,d\cos m + \cos\gamma\,d\cos n \\ & \quad = -(\cos l\,d\cos\alpha + \cos m\,d\cos\beta + \cos n\,d\cos\gamma), \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$ par leurs valeurs (49),

$$\begin{aligned} & \cos\alpha\,d\cos l + \cos\beta\,d\cos m + \cos\gamma\,d\cos n \\ & \quad = -\frac{ds}{\rho}(\cos\xi\cos l + \cos\eta\cos m + \cos\zeta\cos n) = -\frac{ds}{\rho}\cos\varpi. \end{aligned}$$

Pour calculer le coefficient du terme en L^2, différentions les équa-

tions (96) en tenant compte des formules (49), nous aurons

$$(96\,bis)\quad \begin{cases} \cos\alpha\, d\cos l + \cos\beta\, d\cos m + \cos\gamma\, d\cos n = -\dfrac{ds}{\rho}\cos\varpi, \\ \cos\xi\, d\cos l + \cos\eta\, d\cos m + \cos\zeta\, d\cos n = -\sin\varpi\, d\varpi + \dfrac{ds}{r}\sin\varpi, \\ \cos\lambda\, d\cos l + \cos\mu\, d\cos m + \cos\nu\, d\cos n = \cos\varpi\, d\varpi - \dfrac{ds}{r}\cos\varpi. \end{cases}$$

Élevons au carré et ajoutons membre à membre, il viendra

$$(d\cos l)^2 + (d\cos m)^2 + (d\cos n)^2 = \frac{ds^2}{\rho^2}\cos^2\varpi + \left(d\varpi - \frac{ds}{r}\right)^2.$$

Nous aurons donc finalement

$$(97)\qquad d\sigma^2 = dL^2 + \left[\left(L\frac{\cos\varpi}{\rho} - 1\right)^2 + L^2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2\right] ds^2.$$

A l'aide des deux premières formules (59) et des formules (60) et (60)', on peut éliminer $\frac{\cos\varpi}{\rho}$ et $\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}$, de manière à avoir $d\sigma^2$ en fonction de l'angle i seul et des paramètres de la surface; c'est un calcul que nous effectuerons dans chaque cas particulier. On peut néanmoins observer déjà que le coefficient de dL^2 est l'unité, et que celui de ds^2 est une fonction algébrique entière du second degré en L. De plus, les coordonnées à la surface sont rectangulaires et les paramètres u et v sont la longueur de la normale et celle de la courbe directrice.

II. — *Point central.*

26. On appelle *point central* d'une normale le pied, sur cette normale, de sa plus courte distance à la normale infiniment voisine. Pour obtenir ce point, il suffit donc de faire, dans la formule (97), $dL = 0$, et de chercher le minimum du polynôme du second degré

$$\left[\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2\right] L^2 - 2\frac{\cos\varpi}{\rho} L + 1.$$

On sait, par l'algèbre élémentaire, que ce minimum a lieu pour

$$(98) \qquad L_0 = \frac{\frac{\cos\varpi}{\rho}}{\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2};$$

telle est la formule qui donne la distance du point central au point correspondant de la surface.

III. — *Formule de M. Chasles.*

27. Proposons-nous de trouver l'angle de deux normales infiniment voisines en deux points d'une même génératrice. A cet effet, faisons $i = 0$ dans la formule (85), il viendra

$$d\theta^2 = dL^2(P^2 + R^2),$$

puisque E est égal à l'unité. Nous exprimerons que les courbes $v =$ const. se réduisent à des droites en écrivant que leur rayon de courbure est infini, ce qui, d'après l'équation (63), donne en tous les points de la surface

$$P = 0.$$

On aura donc, en définitive,

$$d\theta^2 = R^2 dL^2.$$

Les formules (38) donnent

$$M = 0, \quad N = \frac{dG}{dL}, \quad R = -\frac{S}{G},$$

et la première des formules (19)

$$RS = -\frac{dN}{dL}.$$

On en tire, en éliminant N et S,

$$R^2 = \frac{1}{G}\frac{d^2G}{dL^2}.$$

Mais

$$G^2 = \left(L\frac{\cos\varpi}{\rho} - 1\right)^2 + L^2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dL^2} = \frac{\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2}{\left[\left(L\frac{\cos\varpi}{\rho} - 1\right)^2 + L^2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2\right]^2},$$

et, par suite,

$$d\theta = \frac{\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}}{\left(L\frac{\cos\varpi}{\rho} - 1\right)^2 + L^2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2}\,dL.$$

Cette équation intégrée donne

$$\operatorname{tang}(\theta - \text{const.}) = \frac{\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2}{\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}}\,L - \frac{\frac{\cos\varpi}{\rho}}{\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}}.$$

Si l'on prend pour normale origine la normale au point central, la constante est égale à zéro (98), de sorte qu'en comptant également les L à partir du point central la formule précédente devient

$$(99)\qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2}{\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}}\,L.$$

La propriété qu'elle exprime a été énoncée pour la première fois par M. Chasles.

Si l'on prend pour normale origine la normale située dans le plan tangent à la surface, on a $\theta = 0$ pour $L = 0$, et la formule s'écrit

$$(100)\qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)L}{1 - \frac{\cos\varpi}{\rho}L}.$$

Elle nous sera particulièrement utile sous cette forme.

IV. — *Plan central.*

28. On appelle *plan central* le plan tangent à la normalie au point central. La formule précédente va nous permettre de trouver l'angle que fait avec la direction de la directrice la trace du plan central sur le plan tangent à la surface au point correspondant. Il suffit pour cela d'y remplacer L par la valeur L_0 (98); on trouve

$$\tag{101} \operatorname{tang}\theta_0 = \frac{\dfrac{\cos\varpi}{\rho}}{\dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r}}.$$

V. — *Paramètre de distribution.*

29. L'inverse du coefficient de L dans la formule (99) porte le nom de paramètre de distribution ; nous le désignerons par la lettre k. Pour en avoir une interprétation géométrique, cherchons la plus courte distance de la normale donnée à la normale infiniment voisine; il suffit, pour cela, de remplacer dans la formule (97), dL par zéro et L par L_0 (98), on a

$$d\sigma^2 = \frac{\left(\dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r}\right)^2}{\left(\dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2}\, ds^2.$$

D'autre part, l'angle de deux normales infiniment voisines a pour valeur (86)

$$n^2 = \left[\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2\right] ds^2.$$

On en conclut que

$$\tag{102} k = \frac{\dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r}}{\left(\dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2}$$

est la limite du rapport de $d\sigma$ à n.

VI. — *Courbure sphérique.*

30. La courbure sphérique en un point d'une génératrice s'obtient immédiatement à l'aide de la formule (70), qui donne

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = -\frac{1}{G}\frac{dN}{dL},$$

ou (27)

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = -\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dL^2}.$$

Remplaçons le second membre par sa valeur, il viendra

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = -\frac{\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2}{\left[\left(L\frac{\cos\varpi}{\rho} - 1\right)^2 + L^2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2\right]^2}. \tag{103}$$

On peut en conclure que *la courbure de la surface varie le long d'une génératrice rectiligne dans le rapport inverse du carré de la perpendiculaire menée à cette génératrice et terminée à la génératrice infiniment voisine*, résultat dû à M. Ossian Bonnet.

En remplaçant L par L_0 (98), ce qui fournit la courbure de la normalie au point central, on trouve l'inverse du paramètre de distribution (102).

En faisant $L = 0$, ce qui fournit la courbure de la normalie en son pied, on trouve la torsion géodésique de la surface directrice correspondant à l'azimut de la direction suivie.

VII. — *Courbes des segments normaux.*

31. Concevons, avec M. Laguerre, que l'on porte sur les génératrices de la normalie, à partir de la surface donnée, une longueur L fonction de la position du point sur la directrice. Soient A et A' deux points infiniment voisins de cette directrice, T et T' les angles que font avec la

corde AA′ les segments L et L′ portés sur les normales en A et A′, nous allons calculer l'expression

$$AA'(L\cos T + L'\cos T')$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de ds.

Soient, à cet effet, l, m, n les angles de la normale en A à la surface avec les axes; on a (8)

$$\delta x = I_1\cos\alpha + I_2\cos\xi + I_3\cos\lambda,$$
$$\delta y = I_1\cos\beta + I_2\cos\eta + I_3\cos\mu,$$
$$\delta z = I_1\cos\gamma + I_2\cos\zeta + I_3\cos\nu,$$

I_1, I_2, I_3 désignant, pour abréger, les expressions compliquées infiniment petites du premier, du second et du troisième ordre qui sont tout au long au n° 8. On en tire

$$\begin{aligned} AA'\cos T = {} & I_1\cos\alpha\cos l + I_2\cos\xi\cos l + I_3\cos\lambda\cos l \\ & + I_1\cos\beta\cos m + I_2\cos\eta\cos m + I_3\cos\mu\cos m \\ & + I_1\cos\gamma\cos n + I_2\cos\zeta\cos n + I_3\cos\nu\cos n, \end{aligned}$$

et, à cause des formules (96),

$$AA'\cos T = I_2\cos\varpi + I_3\sin\varpi.$$

Soient l', m', n' les angles que fait la normale en A′ à la surface avec les axes; on aura

$$\begin{aligned} AA'\cos T' = {} & I_1(\cos\alpha\cos l' + \cos\beta\cos m' + \cos\gamma\cos n') \\ & + I_2(\cos\xi\cos l' + \cos\eta\cos m' + \cos\zeta\cos n') \\ & + I_3(\cos\lambda\cos l' + \cos\mu\cos m' + \cos\nu\cos n'). \end{aligned}$$

Mais

$$\cos l' = \cos l + d\cos l + \frac{1}{1.2}d^2\cos l + \ldots,$$
$$\cos m' = \cos m + d\cos m + \frac{1}{1.2}d^2\cos m + \ldots,$$
$$\cos n' = \cos n + d\cos n + \frac{1}{1.2}d^2\cos n + \ldots,$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AA}'\cos \mathrm{T}' = \mathrm{I}_1 \Big[& \cos\alpha\, d\cos l + \cos\beta\, d\cos m + \cos\gamma\, d\cos n \\
& + \frac{1}{1.2}(\cos\alpha\, d^2\cos l + \cos\beta\, d^2\cos m + \cos\gamma\, d^2\cos n) + \ldots \Big] \\
+ \mathrm{I}_2 \Big[& \cos\varpi + \cos\xi\, d\cos l + \cos\eta\, d\cos m + \cos\zeta\, d\cos n \\
& + \frac{1}{1.2}(\cos\xi\, d^2\cos l + \cos\eta\, d^2\cos m + \cos\zeta\, d^2\cos n) + \ldots \Big] \\
+ \mathrm{I}_3 \Big[& \sin\varpi + \cos\lambda\, d\cos l + \cos\mu\, d\cos m + \cos\nu\, d\cos n \\
& + \frac{1}{1.2}(\cos\lambda\, d^2\cos l + \cos\mu\, d^2\cos m + \cos\nu\, d^2\cos n) + \ldots \Big].
\end{aligned}
$$

On a trouvé plus haut (96 *bis*)

$$
(104)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\cos\alpha\, d\cos l + \cos\beta\, d\cos m + \cos\gamma\, d\cos n = -\frac{ds}{\rho}\cos\varpi, \\
&\cos\xi\, d\cos l + \cos\eta\, d\cos m + \cos\zeta\, d\cos n = -\sin\varpi\, d\varpi + \frac{ds}{r}\sin\varpi, \\
&\cos\lambda\, d\cos l + \cos\mu\, d\cos m + \cos\nu\, d\cos n = \cos\varpi\, d\varpi - \frac{ds}{r}\cos\varpi.
\end{aligned}
\right.
$$

Différentions la première de ces équations, il viendra

$$
\begin{aligned}
&\cos\alpha\, d^2\cos l + \cos\beta\, d^2\cos m + \cos\gamma\, d^2\cos n \\
&\quad = -(d\cos\alpha\, d\cos l + d\cos\beta\, d\cos m + d\cos\gamma\, d\cos n) \\
&\quad\quad - ds\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} + \frac{ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi.
\end{aligned}
$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$
\begin{aligned}
&d\cos\alpha\, d\cos l + d\cos\beta\, d\cos m + d\cos\gamma\, d\cos n \\
&\quad = \frac{ds}{\rho}(\cos\xi\, d\cos l + \cos\eta\, d\cos m + \cos\zeta\, d\cos n) = -\frac{ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi + \frac{ds^2}{r\rho}\sin\varpi,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
(105)\quad
\begin{aligned}
&\cos\alpha\, d^2\cos l + \cos\beta\, d^2\cos m + \cos\gamma\, d^2\cos n \\
&\quad = -ds\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} + \frac{2\,ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi - \frac{ds^2}{r\rho}\sin\varpi.
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AA}'\cos\mathrm{T}' = \mathrm{I}_1 \Big[& \cos\alpha\, d\cos l + \cos\beta\, d\cos m + \cos\gamma\, d\cos n \\
& + \frac{1}{1.2}(\cos\alpha\, d^2\cos l + \cos\beta\, d^2\cos m + \cos\gamma\, d^2\cos n) + \ldots \Big] \\
+ \mathrm{I}_2 \Big[& \cos\varpi + \cos\xi\, d\cos l + \cos\eta\, d\cos m + \cos\zeta\, d\cos n \\
& + \frac{1}{1.2}(\cos\xi\, d^2\cos l + \cos\eta\, d^2\cos m + \cos\zeta\, d^2\cos n) + \ldots \Big] \\
+ \mathrm{I}_3 \Big[& \sin\varpi + \cos\lambda\, d\cos l + \cos\mu\, d\cos m + \cos\nu\, d\cos n \\
& + \frac{1}{1.2}(\cos\lambda\, d^2\cos l + \cos\mu\, d^2\cos m + \cos\nu\, d^2\cos n) + \ldots \Big].
\end{aligned}
$$

On a trouvé plus haut (96 *bis*)

$$
(104)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \cos\alpha\, d\cos l + \cos\beta\, d\cos m + \cos\gamma\, d\cos n = -\frac{ds}{\rho}\cos\varpi, \\
& \cos\xi\, d\cos l + \cos\eta\, d\cos m + \cos\zeta\, d\cos n = -\sin\varpi\, d\varpi + \frac{ds}{r}\sin\varpi, \\
& \cos\lambda\, d\cos l + \cos\mu\, d\cos m + \cos\nu\, d\cos n = \cos\varpi\, d\varpi - \frac{ds}{r}\cos\varpi.
\end{aligned}
\right.
$$

Différentions la première de ces équations, il viendra

$$
\begin{aligned}
& \cos\alpha\, d^2\cos l + \cos\beta\, d^2\cos m + \cos\gamma\, d^2\cos n \\
& \quad = -(d\cos\alpha\, d\cos l + d\cos\beta\, d\cos m + d\cos\gamma\, d\cos n) \\
& \qquad - ds\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} + \frac{ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi.
\end{aligned}
$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$
\begin{aligned}
& d\cos\alpha\, d\cos l + d\cos\beta\, d\cos m + d\cos\gamma\, d\cos n \\
& \quad = \frac{ds}{\rho}(\cos\xi\, d\cos l + \cos\eta\, d\cos m + \cos\zeta\, d\cos n) = -\frac{ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi + \frac{ds^2}{r\rho}\sin\varpi,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
(105)\quad
\begin{aligned}
& \cos\alpha\, d^2\cos l + \cos\beta\, d^2\cos m + \cos\gamma\, d^2\cos n \\
& \quad = -ds\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} + \frac{2\,ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi - \frac{ds^2}{r\rho}\sin\varpi.
\end{aligned}
$$

Différentions la seconde des équations (104), il viendra

$$\begin{aligned}&\cos\xi\, d^2\cos l + \cos\eta\, d^2\cos m + \cos\zeta\, d^2\cos n\\ &\quad = -(d\cos\xi\, d\cos l + d\cos\eta\, d\cos m + d\cos\zeta\, d\cos n) + ds\sin\varpi\, d\frac{1}{r}\\ &\qquad + \frac{ds}{r}\cos\varpi\, d\varpi - \cos\varpi\, d\varpi^2 - \sin\varpi\, d^2\varpi.\end{aligned}$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$\begin{aligned}&d\cos\xi\, d\cos l + d\cos\eta\, d\cos m + d\cos\zeta\, d\cos n\\ &\quad = -\frac{ds}{r}\cos\varpi\, d\varpi + ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\varpi,\end{aligned}$$

d'où

$$(105)\quad\begin{aligned}&\cos\xi\, d^2\cos l + \cos\eta\, d^2\cos m + \cos\zeta\, d^2\cos n\\ &\quad = -\cos\varpi\, d\varpi^2 - \sin\varpi\, d^2\varpi + \frac{2\,ds}{r}\cos\varpi\, d\varpi\\ &\qquad + ds\sin\varpi\, d\frac{1}{r} - ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\varpi.\end{aligned}$$

Différentions la troisième des équations (104), il viendra

$$\begin{aligned}&\cos\lambda\, d^2\cos l + \cos\mu\, d^2\cos m + \cos\nu\, d^2\cos n\\ &\quad = -(d\cos\lambda\, d\cos l + d\cos\mu\, d\cos m + d\cos\nu\, d\cos n) - \sin\varpi\, d\varpi^2\\ &\qquad + \cos\varpi\, d^2\varpi + \frac{ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi - ds\cos\varpi\, d\frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$d\cos\lambda\, d\cos l + d\cos\mu\, d\cos m + d\cos\nu\, d\cos n = -\frac{ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi + \frac{ds^2}{r^2}\sin\varpi,$$

d'où

$$(105)\quad\begin{aligned}&\cos\lambda\, d^2\cos l + \cos\mu\, d^2\cos m + \cos\nu\, d^2\cos n\\ &\quad = -\sin\varpi\, d\varpi^2 + \cos\varpi\, d^2\varpi + \frac{2\,ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi - ds\cos\varpi\, d\frac{1}{r} - \frac{ds^2}{r^2}\sin\varpi.\end{aligned}$$

Différentions la première des équations (105), il viendra

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha\, d^3\cos l + \cos\beta\, d^3\cos m + \cos\gamma\, d^3\cos n \\
&\quad = -(d\cos\alpha\, d^2\cos l + d\cos\beta\, d^2\cos m + d\cos\gamma\, d^2\cos n) - ds\cos\varpi\, d^2\frac{1}{\rho} \\
&\qquad + \frac{2\,ds}{\rho}\sin\varpi\, d^2\varpi + \frac{2\,ds}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi^2 + 3\,ds\sin\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{\rho} \\
&\qquad - \frac{ds^2}{r\rho}\cos\varpi\, d\varpi - \frac{ds^2}{r}\sin\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{ds^2}{\rho}\sin\varpi\, d\frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$\begin{aligned}
&d\cos\alpha\, d^2\cos l + d\cos\beta\, d^2\cos m + d\cos\gamma\, d^2\cos n \\
&\quad = \frac{ds}{\rho}(\cos\xi\, d^2\cos l + \cos\eta\, d^2\cos m + \cos\zeta\, d^2\cos n),
\end{aligned}$$

ou, à cause de l'équation (105),

$$\begin{aligned}
&d\cos\alpha\, d^2\cos l + d\cos\beta\, d^2\cos m + d\cos\gamma\, d^2\cos n \\
&\quad = -\frac{ds}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi^2 - \frac{ds}{\rho}\sin\varpi\, d^2\varpi + \frac{2\,ds^2}{r\rho}\cos\varpi\, d\varpi \\
&\qquad + \frac{ds^2}{\rho}\sin\varpi\, d\frac{1}{r} - \frac{ds^3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\varpi,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
(106)\quad &\cos\alpha\, d^3\cos l + \cos\beta\, d^3\cos m + \cos\gamma\, d^3\cos n \\
&\quad = \frac{3\,ds}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi^2 + \frac{3\,ds}{\rho}\sin\varpi\, d^2\varpi - \frac{3\,ds^2}{r\rho}\cos\varpi\, d\varpi - \frac{2\,ds^2}{\rho}\sin\varpi\, d\frac{1}{r} \\
&\qquad + \frac{ds^3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\varpi - ds\cos\varpi\, d^2\frac{1}{\rho} + 3\,ds\sin\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{ds^2}{r}\sin\varpi\, d\frac{1}{\rho}.
\end{aligned}$$

Différentions la deuxième des équations (105), il viendra

$$\begin{aligned}
&\cos\xi\, d^3\cos l + \cos\eta\, d^3\cos m + \cos\zeta\, d^3\cos n \\
&\quad = -(d\cos\xi\, d^2\cos l + d\cos\eta\, d^2\cos m + d\cos\zeta\, d^2\cos n) + \sin\varpi\, d\varpi^3 - \sin\varpi\, d^3\varpi \\
&\qquad - 3\cos\varpi\, d\varpi\, d^2\varpi + \frac{2\,ds}{r}\cos\varpi\, d^2\varpi - \frac{2\,ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi^2 + ds\sin\varpi\, d^2\frac{1}{r} \\
&\qquad + 3\,ds\cos\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{r} + ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi\, d\varpi - \frac{2\,ds^2}{\rho}\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{2\,ds^2}{r}\cos\varpi\, d\frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$\begin{aligned}
&d\cos\xi\, d^2\cos l + d\cos\eta\, d^2\cos m + d\cos\zeta\, d^2\cos n\\
&\quad = -\frac{ds}{\rho}(\cos\alpha\, d^2\cos l + \cos\beta\, d^2\cos m + \cos\gamma\, d^2\cos n)\\
&\quad\quad -\frac{ds}{r}(\cos\lambda\, d^2\cos l + \cos\mu\, d^2\cos m + \cos\nu\, d^2\cos n),
\end{aligned}$$

ou, à cause des équations (105),

$$\begin{aligned}
&d\cos\xi\, d^2\cos l + d\cos\eta\, d^2\cos m + d\cos\zeta\, d^2\cos n\\
&\quad = \frac{ds^2}{\rho}\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} - 2\,ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi\, d\varpi + \frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi\\
&\quad\quad + \frac{ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi^2 - \frac{ds}{r}\cos\varpi\, d^2\varpi + \frac{ds^2}{r}\cos\varpi\, d\frac{1}{r};
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
(106)\quad &\cos\xi\, d^3\cos l + \cos\eta\, d^3\cos m + \cos\zeta\, d^3\cos n\\
&\quad = \sin\varpi\, d\varpi^3 - \sin\varpi\, d^3\varpi - 3\cos\varpi\, d\varpi\, d^2\varpi + 3\,ds\cos\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{r}\\
&\quad\quad + ds\sin\varpi\, d^2\frac{1}{r} - \frac{3\,ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi^2 + \frac{3\,ds}{r}\cos\varpi\, d^2\varpi - \frac{3\,ds^2}{r}\cos\varpi\, d\frac{1}{r}\\
&\quad\quad + 3\,ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi\, d\varpi - \frac{3\,ds^2}{r}\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{ds^3}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi.
\end{aligned}$$

Différentions la première des équations (106), il viendra

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha\, d^4\cos l + \cos\beta\, d^4\cos m + \cos\gamma\, d^4\cos n\\
&= -(d\cos\alpha\, d^3\cos l + d\cos\beta\, d^3\cos m + d\cos\gamma\, d^3\cos n) + \frac{9\,ds}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi\, d^2\varpi\\
&\quad - \frac{3\,ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi^3 + 6\,ds\cos\varpi\, d\varpi^2 d\frac{1}{\rho} + \frac{3\,ds}{r}\sin\varpi\, d^3\varpi + 6\,ds\sin\varpi\, d^2\varpi\, d\frac{1}{\rho}\\
&\quad - \frac{3\,ds^2}{r\rho}\cos\varpi\, d^2\varpi + \frac{3\,ds^2}{r\rho}\sin\varpi\, d\varpi^2 - \frac{4\,ds^2}{r}\cos\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{5\,ds^2}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{r}\\
&\quad - \frac{2\,ds^2}{\rho}\sin\varpi\, d^2\frac{1}{r} - 3\,ds^2\sin\varpi\, d\frac{1}{r}\, d\frac{1}{\rho} - \frac{ds^3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi\, d\varpi\\
&\quad + ds^3\left(\frac{3}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} + \frac{2\,ds^3}{r\rho}\cos\varpi\, d\frac{1}{r} - ds\cos\varpi\, d^3\frac{1}{\rho}\\
&\quad + 4\,ds\sin\varpi\, d\varpi\, d^2\frac{1}{\rho} - \frac{ds^2}{r}\sin\varpi\, d^2\frac{1}{\rho}.
\end{aligned}$$

Il est facile de voir sur ce développement que le coefficient du terme en ds^4 est la demi-dérivée par rapport à s du coefficient du terme en ds^3, et que le cofficient du terme en ds^5 n'est pas uniquement fonction de celui du terme en ds^3.

En posant

$$K = L\left(\frac{\sin\varpi}{2\rho}\frac{d\varpi}{ds} - \frac{\cos\varpi}{6}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} - \frac{\sin\varpi}{3r\rho}\right) - \frac{dL}{ds}\frac{\cos\varpi}{2\rho}, \tag{108}$$

on a donc

$$AA'(L\cos T + L'\cos T') = K\,ds^3 + \frac{1}{2}\frac{dK}{ds}ds^4 + \ldots. \tag{109}$$

D'où cette conclusion, due à M. Laguerre [1], que l'expression ci-dessus est généralement du troisième ordre; mais que, lorsqu'elle est d'un ordre supérieur au troisième, elle est au moins du cinquième.

32. Pour que K soit égal à zéro, il faut et il suffit que L satisfasse à l'équation différentielle

$$\frac{dL}{L} = \frac{2\rho\,ds}{\cos\varpi}\left(\frac{\sin\varpi}{2\rho}\frac{d\varpi}{ds} - \frac{\cos\varpi}{6}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} - \frac{\sin\varpi}{3r\rho}\right)$$

ou

$$\frac{dL}{L} = \operatorname{tang}\varpi\,d\varpi - \frac{2}{3}\operatorname{tang}\varpi\frac{ds}{r} - \frac{1}{3}\rho\,d\frac{1}{\rho}$$

ou

$$\frac{dL}{L} = \operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi - \frac{2}{3}\frac{ds}{r}\right) + \frac{1}{3}\frac{d\rho}{\rho}, \tag{110}$$

ou, en intégrant,

$$L = \frac{C\sqrt[3]{\rho}}{\cos\varpi}\,e^{-\frac{2}{3}\int \operatorname{tang}\varpi\frac{ds}{r}}, \tag{111}$$

C étant une constante arbitraire.

La valeur du segment L étant déterminée par cette relation, on aura

---

[1] *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, t. VII, p. 49; 1870.

alors cette proposition que l'expression (109) en chacun des points de la directrice de la normalie sera une quantité infiniment petite du cinquième ordre.

C'est aux courbes tracées sur la normalie, et correspondant aux différentes valeurs de la constante C dans l'équation (111), que nous donnerons le nom de *courbes des segments normaux*.

33. L'équation (110) se présente sous une forme plus commode, en introduisant le rayon de courbure R de la section normale tangente à la directrice de la normalie. On a, par le théorème de Meusnier,

$$\rho = \mathrm{R}\cos\varpi,$$

d'où

$$d\rho = \cos\varpi\, d\mathrm{R} - \mathrm{R}\sin\varpi\, d\varpi,$$

et

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} - \operatorname{tang}\varpi\, d\varpi.$$

Substituant dans l'équation (110), il vient

$$\frac{d\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = \frac{1}{3}\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} + \frac{2}{3}\operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi - \frac{ds}{r}\right). \tag{112}$$

Or, pour une géodésique, $\operatorname{tang}\varpi = 0$, et pour une ligne de courbure $d\varpi - \frac{ds}{r} = 0$; réciproquement, le produit $\operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi - \frac{ds}{r}\right)$ ne s'annule que pour une géodésique et pour une ligne de courbure. Ces deux genres de courbes sont donc caractérisés par cette propriété des normalies auxquelles elles servent de directrices, que

$$\frac{d\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = \frac{1}{3}\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}}, \tag{113}$$

ou, en intégrant, que

$$\mathrm{L} = \mathrm{C}\sqrt[3]{\mathrm{R}}, \tag{114}$$

C désignant une constante, c'est-à-dire que, dans les deux cas, la valeur du segment normal est proportionnelle à la racine cubique de R.

Cette propriété géométrique, commune aux géodésiques et aux lignes de courbure, a été découverte par M. Laguerre ([1]); elle correspond à l'équation différentielle du second ordre donnée par Joachimsthal.

Quant aux asymptotiques, l'expression (108) montre que L doit être constamment nul; de sorte qu'une asymptotique tient lieu sur la normalie correspondante de toutes les courbes des segments normaux.

(*La suite prochainement.*)

([1]) *Loc. cit.*

NOTE

SUR LE

CALCUL DES ACCÉLÉRATIONS DES DIVERS ORDRES

DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE COURBE GAUCHE,

PAR M. BOUQUET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

Une courbe gauche est complétement déterminée, abstraction faite de sa position dans l'espace, lorsqu'on donne les valeurs du rayon de courbure et du rayon de torsion, en un point quelconque M de cette courbe, en fonction de l'arc $OM = s$ compté à partir d'une origine O prise sur la courbe. Supposons qu'un point mobile parcoure cette courbe et que l'on connaisse l'expression de l'arc s en fonction du temps; il est clair que les valeurs des accélérations des divers ordres, en chaque point de la courbe, sont également déterminées. L'objet de cette Note est d'exposer une méthode simple pour calculer ces accélérations à l'aide des données indiquées.

Imaginons, pour un instant, les points de la courbe rapportés à trois axes de coordonnées rectangulaires, disposés de façon que, pour un observateur placé sur OZ, la rotation de OX vers OY s'effectue dans le sens direct. Menons en un point quelconque M de la courbe: 1° la tangente MT, dans le sens où l'arc s va en croissant; 2° la normale MN, qui passe au centre de courbure; 3° enfin une normale MN_1 au plan osculateur, et dans une direction telle que, pour un observateur placé sur MN_1, la rotation de MT vers MN ait lieu dans le sens direct. Soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les cosinus des angles que forment avec les trois axes les directions MT, MN, MN_1, ρ le rayon de courbure, ρ_1 le rayon de torsion affecté du signe + ou du signe —, suivant que la droite $M'N'_1$, relative à un point M' voisin de M et déterminé par un accroissement positif de l'arc, fait avec MN un angle aigu

ou obtus. On sait que les neuf cosinus vérifient les relations

$$(1)\ \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\alpha'}{\rho}, \\ \dfrac{d\beta}{ds} = \dfrac{\beta'}{\rho}, \\ \dfrac{d\gamma}{ds} = \dfrac{\gamma'}{\rho'}, \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} \dfrac{d\alpha''}{ds} = \dfrac{\alpha'}{\rho_1}, \\ \dfrac{d\beta''}{ds} = \dfrac{\beta'}{\rho_1}, \\ \dfrac{d\gamma''}{ds} = \dfrac{\gamma'}{\rho_1}, \end{cases} \quad (3)\ \begin{cases} \dfrac{d\alpha'}{ds} = -\dfrac{\alpha}{\rho} - \dfrac{\alpha''}{\rho_1}, \\ \dfrac{d\beta'}{ds} = -\dfrac{\beta}{\rho} - \dfrac{\beta''}{\rho_1}, \\ \dfrac{d\gamma'}{ds} = -\dfrac{\gamma}{\rho} - \dfrac{\gamma''}{\rho_1}, \end{cases}$$

très-utiles dans l'étude des courbes gauches.

Différentions plusieurs fois de suite, par rapport à s, ces formules, et, après chaque différentiation, remplaçons dans les seconds membres les dérivées des cosinus par les valeurs précédentes. Puisque les cosinus α, β, γ sont égaux respectivement à $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, il est évident que l'on obtiendra pour $\frac{d^n x}{ds^n}, \frac{d^n y}{ds^n}, \frac{d^n z}{ds^n}$ des expressions de la forme suivante :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^n x}{ds^n} = L_n \alpha + L'_n \alpha' + L''_n \alpha'', \\ \dfrac{d^n y}{ds^n} = L_n \beta + L'_n \beta' + L''_n \beta'', \\ \dfrac{d^n z}{ds^n} = L_n \gamma + L'_n \gamma' + L''_n \gamma'', \end{cases}$$

L_n, L'_n, L''_n renfermant ρ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-2$, ρ_1 et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-3$.

Remarquons que, si l'on prend pour axes les droites analogues à MT, MN, MN_1 relatives au point O, il faudra, pour obtenir les valeurs de $\frac{d^n x}{ds^n}, \frac{d^n y}{ds^n}, \frac{d^n z}{ds^n}$ en ce point, faire dans les formules précédentes $\alpha = \beta' = \gamma'' = 1$, $\alpha' = \alpha'' = \beta = \beta'' = \gamma = \gamma' = 0$, puis remplacer dans L_n, L'_n, L''_n la variable s par zéro; d'où il résulte que, si l'on développe les coordonnées x, y, z suivant les puissances de l'arc, on aura

$$\begin{aligned} x &= (L_1)_0 \frac{s}{1} + (L_2)_0 \frac{s^2}{1.2} + (L_3)_0 \frac{s^3}{1.2.3} + (L_4)_0 \frac{s^4}{1.2.3.4} + \ldots, \\ y &= (L'_1)_0 \frac{s}{1} + (L'_2)_0 \frac{s^2}{1.2} + (L'_3)_0 \frac{s^3}{1.2.3} + (L'_4)_0 \frac{s^4}{1.2.3.4} + \ldots, \\ z &= (L''_1)_0 \frac{s}{1} + (L''_2)_0 \frac{s^2}{1.2} + (L''_3)_0 \frac{s^3}{1.2.3} + (L''_4)_0 \frac{s^4}{1.2.3.4} + \ldots; \end{aligned}$$

les valeurs des fonctions L jusqu'au quatrième ordre étant

$$\begin{array}{llll}
L_1 = 1, & L_2 = 0, & L_3 = -\dfrac{1}{\rho^2}, & L_4 = \dfrac{3}{\rho^3}\dfrac{d\rho}{ds}, \\
L'_1 = 0, & L'_2 = \dfrac{1}{\rho}, & L'_3 = -\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{ds}, & L'_4 = -\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d^2\rho}{ds^2} + \dfrac{2}{\rho^3}\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right) - \dfrac{1}{\rho^3} - \dfrac{1}{\rho\rho_1^2}, \\
L''_1 = 0, & L''_2 = 0, & L''_3 = -\dfrac{1}{\rho\rho_1}, & L''_4 = \dfrac{2}{\rho^2\rho_1}\dfrac{d\rho}{ds} + \dfrac{1}{\rho\rho_1^2}\dfrac{d\rho_1}{ds}.
\end{array}$$

L'expression de z montre que, pour une valeur positive très-petite de s, le signe de cette coordonnée est contraire à celui de ρ_1. Or, dans le voisinage d'un point quelconque, on peut assimiler l'arc de la courbe à un arc d'hélice ; on en conclut que la valeur de ρ_1 en un point est positive ou négative, suivant que l'arc de la courbe, dans le voisinage de ce point, est *dextrorsum* ou *sinistrorsum*.

Prenons maintenant lès formules

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds}v, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}v, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dz}{ds}v,$$

et différentions chacune d'elles plusieurs fois de suite par rapport à t : on a

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x}{ds^2}v^2 + \frac{dx}{ds}\frac{dv}{dt}, \\
\frac{d^3x}{dt^3} &= \frac{d^3x}{ds^3}v^3 + 3\frac{d^2x}{ds^2}v\frac{dv}{dt} + \frac{dx}{ds}\frac{d^2v}{dt^2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}$$

de même,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y}{ds^2}v^2 + \frac{dy}{ds}\frac{dv}{dt}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2z}{ds^2}v^2 + \frac{dz}{ds}\frac{dv}{dt}; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si l'on remplace dans les seconds membres les dérivées $\frac{d^px}{ds^p}$, $\frac{d^py}{ds^p}$, $\frac{d^pz}{ds^p}$ par leurs valeurs (4), on obtient pour $\frac{d^nx}{dt^n}$, $\frac{d^ny}{dt^n}$, $\frac{d^nz}{dt^n}$ des expres-

sions de la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^n x}{dt^n} = G_n\alpha + G'_n\alpha' + G''_n\alpha'', \\[2ex] \dfrac{d^n y}{dt^n} = G_n\beta + G'_n\beta' + G''_n\beta'', \\[2ex] \dfrac{d^n z}{dt^n} = G_n\gamma + G'_n\gamma' + G''_n\gamma'', \end{cases}$$

dans lesquelles G_n, G'_n, G''_n renferment ρ et ses dérivées par rapport à s jusqu'à l'ordre $n-2$, ρ_1 et ses dérivées par rapport à s jusqu'à l'ordre $n-3$, enfin v et ses dérivées par rapport à t jusqu'à l'ordre $n-1$. Supposons, comme précédemment, que les axes soient les droites MT, MN, MN_1 relatives au point O, on aura

$$\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)_0 = (G_n)_0, \quad \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)_0 = (G'_n)_0, \quad \left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)_0 = (G''_n)_0;$$

c'est-à-dire que G_n, G'_n, G''_n sont les projections de l'accélération de l'ordre $n-1$ sur les trois droites MT, MN, MN_1. Voici les valeurs de ces projections pour les trois premiers ordres :

$$1^{\text{er}}\ \text{ordre.}\ \begin{cases} \dfrac{dv}{dt}, \\[2ex] \dfrac{v^2}{\rho}, \\[2ex] 0; \end{cases} \qquad 2^{\text{e}}\ \text{ordre.}\ \begin{cases} \dfrac{d^2v}{dt^2} - \dfrac{v^3}{\rho^2}, \\[2ex] \dfrac{3}{\rho}v\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{ds}v^3, \\[2ex] -\dfrac{1}{\rho\rho_1}v^3; \end{cases}$$

$$3^{\text{e}}\ \text{ordre.}\ \begin{cases} \dfrac{d^3v}{dt^3} - \dfrac{6}{\rho^2}v^2\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{3}{\rho^3}\dfrac{d\rho}{ds}v^4, \\[2ex] \dfrac{4}{\rho}v\dfrac{d^2v}{dt^2} + \dfrac{3}{\rho}\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 - \dfrac{6}{\rho^2}\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)v^2\dfrac{dv}{dt} + \left[-\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d^2\rho}{ds^2} + \dfrac{2}{\rho^3}\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2 - \dfrac{1}{\rho^3} - \dfrac{1}{\rho\rho_1^2}\right]v^4, \\[2ex] -\dfrac{6}{\rho\rho_1}v^2\dfrac{dv}{dt} + \left[\dfrac{2}{\rho^2\rho_1}\dfrac{d\rho}{ds} + \dfrac{1}{\rho\rho_1^2}\dfrac{d\rho_1}{ds}\right]v^4. \end{cases}$$

ÉTUDE

DE

L'ACCÉLÉRATION DANS LE DÉPLACEMENT

D'UN SYSTÈME DE FORME VARIABLE,

PAR M. DURRANDE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

1. Dans un Mémoire précédent ([1]), je me suis occupé du déplacement d'une figure qui subit en même temps une déformation homographique, c'est-à-dire d'un système de points dont les vitesses sont des fonctions linéaires des coordonnées de chacun d'eux. Dans ce premier travail, je n'ai considéré que les relations entre les vitesses des divers points du système; ces relations sont déjà assez remarquables pour fixer un peu l'attention. En étudiant les propriétés du déplacement d'un système dont les déformations sont soumises à la loi de l'homographie, je dois forcément retrouver tous les théorèmes donnés par M. Chasles sur le déplacement d'un corps solide. Les lecteurs de mon premier Mémoire ont pu remarquer avec quelle simplicité j'ai pu déduire toutes les relations entre les vitesses des divers points d'une figure géométrique de l'expression qui donne la vitesse d'un point estimée dans une certaine direction; cette même formule m'a également fourni une solution extrêmement simple du problème qui a pour objet la détermination des paramètres du déplacement d'un système lorsqu'on connaît en grandeur et en direction les vitesses de quatre points donnés.

Le second travail, que je présente aujourd'hui, a pour objet l'étude de l'accélération dans le système considéré du Mémoire précédent. Je montre d'abord que l'accélération totale d'un point du système peut être considérée comme la résultante de trois accélérations partielles,

([1]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. II, p. 81.

savoir : 1° une accélération commune à tous les points; 2° une accélération relative à l'origine, qui dépend des paramètres de la déformation et qui fait l'objet principal de cette seconde étude; 3° l'accélération relative à l'origine dans le cas où le système serait solidifié.

Dans la première Partie, on a vu que la dérivée logarithmique du rayon vecteur, ce que j'ai désigné par ε et qu'on pourrait appeler le coefficient de *déformation du premier ordre,* joue un très-grand rôle; sa variation est représentée par une surface du second ordre que j'ai appelée *déformatrice*. Ici nous allons rencontrer une grandeur analogue, qu'on pourra appeler le *coefficient de déformation* du second ordre, et dont la variation, plus compliquée que celle de ε, sera donnée par une surface du quatrième ordre en général.

Je donne le nom de *seconde déformatrice*, non pas à cette surface du quatrième ordre, mais à une surface du second degré, qui a les mêmes axes principaux que la première déformatrice, et qui joue le même rôle dans l'étude de l'accélération. Ainsi la composante de l'accélération qui ne dépend que des paramètres de la déformation est normale en chaque point à une surface homothétique à la seconde déformatrice et proportionnelle à son demi-paramètre différentiel du premier ordre.

Dans le cas où l'on suppose le système dépourvu d'un mouvement général de translation et de rotation, et soumis uniquement à des *déformations statiques*, la demi-dérivée du carré de la vitesse est le produit des deux demi-paramètres différentiels des deux déformatrices par le cosinus de l'angle de leurs directions.

On remarquera que je n'insiste pas sur les propriétés qui résultent de ce que les composantes des accélérations totales ou partielles suivant les axes sont des fonctions linéaires des coordonnées; ce serait répéter ce que j'ai déjà indiqué dans le premier travail sur les vitesses. Il n'est pas difficile de voir, par exemple, que les points du système pour lesquels l'accélération totale où l'une des accélérations partielles est la même sont situés sur des surfaces du second ordre; et cela serait vrai pour les accélérations des divers ordres (1).

(1) Les principaux résultats contenus dans ce travail ont paru déjà dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, novembre 1872.

I. — *Expressions des composantes de l'accélération.*

2. Nous avons trouvé (p. 77 du premier Mémoire), pour les expressions des vitesses composantes, dans le cas où le système n'a aucun point fixe :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \quad \varepsilon_1 x - r y + q z + u_1, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = \quad r x + \varepsilon_2 y - p z + u_2, \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = - q x + p y + \varepsilon_3 z + u_3. \end{cases}$$

En différentiant de nouveau les équations (1) par rapport au temps, on aura

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = J_x^0 + J'_x + J''_x, \\[2mm] \dfrac{d^2 y}{dt^2} = J_y^0 + J'_y + J''_y, \\[2mm] \dfrac{d^2 z}{dt^2} = J_z^0 + J'_z + J''_z; \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(3)\qquad \begin{cases} J_x^0 = \quad \varepsilon_1 u_1 - r u_2 + q u_3 + \dfrac{du_1}{dt}, \\[2mm] J_y^0 = \quad r u_1 + \varepsilon_2 u_2 - p u_3 + \dfrac{du_2}{dt}, \\[2mm] J_z^0 = - q u_1 + p u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \dfrac{du_3}{dt}, \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} J'_x = \quad \left(\varepsilon_1^2 + \dfrac{d\varepsilon_1}{dt}\right) x - r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) y + q(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) z, \\[2mm] J'_y = \quad r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) x + \left(\varepsilon_2^2 + \dfrac{d\varepsilon_2}{dt}\right) y - p(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) z, \\[2mm] J'_z = - q(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) x + p(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + y \left(\varepsilon_1^3 + \dfrac{d\varepsilon_3}{dt}\right) z; \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} J''_x = - (r^2 + q^2) x + \left(pq - \dfrac{dr}{dt}\right) y + \left(pr + \dfrac{dq}{dt}\right) z, \\[2mm] J''_y = \quad \left(pq + \dfrac{dr}{dt}\right) x - (r^2 + p^2) y + \left(rq - \dfrac{dp}{dt}\right) z, \\[2mm] J''_z = \quad \left(pr - \dfrac{dq}{dt}\right) x + \left(qr + \dfrac{dp}{dt}\right) y - (p^2 + q^2) z. \end{cases}$$

Posons encore, pour abréger l'écriture,

$$\mathcal{E}_1 = \varepsilon_1^2 + \frac{d\varepsilon_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = \varepsilon_2^2 + \frac{d\varepsilon_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_3 = \varepsilon_3^2 + \frac{d\varepsilon_3}{dt},$$

$$\mathrm{P} = p(\varepsilon_2 + \varepsilon_3), \quad \mathrm{Q} = q(\varepsilon_3 + \varepsilon_1), \quad \mathrm{R} = r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2);$$

les expressions des J' deviennent

$$(6) \qquad \begin{cases} J'_x = \mathcal{E}_1 x - \mathrm{R}y + \mathrm{Q}z, \\ J'_y = \mathrm{R}x + \mathcal{E}_2 y - \mathrm{P}z, \\ J'_z = -\mathrm{Q}x + \mathrm{P}y + \mathcal{E}_3 z. \end{cases}$$

Quant aux J''_1, on peut aussi les écrire d'une manière assez simple; en effet, on a

$$J''_x = -\omega^2 x + p(px + qy + rz) + z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt};$$

δ désignant la distance du point (x, y, z) au plan

$$px + qy + rz = 0,$$

perpendiculaire à l'axe de rotation, on voit que

$$px + qy + rz = \delta\omega,$$

d'où

$$(7) \qquad \begin{cases} J''_x = \omega^2\left[\delta\cos\left(\widehat{\omega, x}\right) - x\right] + z\dfrac{dq}{dt} - y\dfrac{dr}{dt}, \\ J''_y = \omega^2\left[\delta\cos\left(\widehat{\omega, y}\right) - y\right] + x\dfrac{dr}{dt} - z\dfrac{dp}{dt}, \\ J''_z = \omega^2\left[\delta\cos\left(\widehat{\omega, z}\right) - z\right] + y\dfrac{dp}{dt} - x\dfrac{dq}{dt}. \end{cases}$$

Les formules (2) expriment que l'accélération totale d'un point du système se compose de trois parties :

1° L'accélération J_0, commune à tous les points du système;

2° L'accélération J', due à la déformation;

3° L'accélération J'', qui serait celle du système solidifié, pivotant autour de l'origine.

3. Les composantes de l'accélération totale, comme celles des accélérations partielles J', J'', comme aussi celles des vitesses, sont des fonctions linéaires des coordonnées du point. Par suite, toutes les rela-

tions, tous les théorèmes déduits de cette forme linéaire, trouvés pour les vitesses, s'appliqueront aux accélérations ; tels sont en particulier les théorèmes démontrés au paragraphe IV de mon premier Mémoire, et les discussions relatives à l'existence d'un centre ou d'un axe des vitesses ([1]).

Je laisserai donc de côté tout ce qui concerne les *centre* et *axe* d'accélération, pour m'occuper tout spécialement de l'étude de la partie J′ de l'accélération qui dépend de la déformation du système.

II. — *Des paramètres qui entrent dans les expressions des composantes de* J′.

4. Si l'on se reporte aux équations du groupe (6), on remarquera sans peine la parfaite analogie de forme des expressions de J'_x, J'_y, J'_z et de celles des vitesses relatives à l'origine. Ces équations renferment six paramètres $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, P, Q, R, dont nous allons chercher la signification.

5. *Variation de* $\mathcal{E}$. — Les trois paramètres $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ sont évidemment, d'après leur définition, les trois valeurs principales de la quantité définie par la relation

$$\mathcal{E} = \varepsilon^2 + \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Or, en désignant par ρ le rayon vecteur, on sait (premier Mémoire, p. 86) que

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

d'où

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\varepsilon^2 + \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2};$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}.$$

([1]) On pourra voir toutefois dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 13 avril 1874) une Note où j'indique la démonstration d'un certain nombre de propriétés géométriques du déplacement dépendant à la fois des vitesses et des accélérations. Telles sont les questions relatives à la distribution des plans osculateu aux trajectoires des divers points et des normales principales. (*Voir* la Note placée à la fin de cette étude.)

On voit donc ainsi que $\mathcal{E}$ *peut être considéré comme le coefficient de l'accélération de déformation linéaire dans la direction du rayon vecteur* (¹). Cette quantité joue donc, par rapport à l'accélération, le même rôle que ε par rapport à la vitesse.

Nous avons trouvé (p. 88 du premier Mémoire) que si (α, β, γ) sont les angles d'une direction avec les axes coordonnés rectangulaires, la valeur de ε qui correspond à cette direction est donnée par la formule

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma,$$

qui exprime que ε varie en raison inverse du carré du rayon vecteur d'une surface du second ordre au centre

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = 1,$$

à laquelle j'ai donné le nom de *déformatrice*. Il est naturel de se demander s'il n'existe pas pour $\mathcal{E}$ un mode analogue de représentation.

Pour le découvrir, reprenons les formules (10) (premier Mémoire, p. 89)

$$\begin{aligned}
\varepsilon\cos\alpha + \theta\cos\xi &= \varepsilon_1\cos\alpha - r\cos\beta + q\cos\gamma,\\
\varepsilon\cos\beta + \theta\cos\eta &= r\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta - p\cos\gamma,\\
\varepsilon\cos\gamma + \theta\cos\zeta &= -q\cos\alpha + p\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma,
\end{aligned}$$

p, q, r étant les projections de la vitesse angulaire ω sur les axes; on peut, en introduisant les angles (ξ', η', ζ') que la normale au plan $(\overline{\rho\omega})$ fait avec les axes, et posant $\omega \sin\widehat{(\rho, \omega)} = \theta$, écrire les formules précédentes sous la forme

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned}
\varepsilon\cos\alpha + \theta\cos\xi &= \varepsilon_1\cos\alpha + \theta'\cos\xi',\\
\varepsilon\cos\beta + \theta\cos\eta &= \varepsilon_2\cos\beta + \theta'\cos\eta',\\
\varepsilon\cos\gamma + \theta\cos\zeta &= \varepsilon_3\cos\gamma + \theta'\cos\zeta';
\end{aligned}\right.$$

θ' est ce que deviendrait θ si le système ne se déformait pas, ou si les déformations étaient les mêmes en tous sens.

(¹) Il serait peut-être préférable de donner à ε le nom de *coefficient de déformation du premier ordre*, et à $\mathcal{E}$ le nom de *coefficient de déformation du second ordre*.

Des formules (8) on déduit sans peine, en posant, comme dans la première Partie (p. 93),

$$\cos\tau = \cos\xi\cos\xi' + \cos\eta\cos\eta' + \cos\zeta\cos\zeta',$$

et remarquant que $\sum \cos\xi\cos\alpha = 0$, $\sum \cos\xi'\cos\alpha = 0$

$$(9) \qquad \varepsilon^2 = \sum \varepsilon_1^2 \cos^2\alpha - \theta^2 - \theta'^2 + 2\theta\theta'\cos\tau.$$

D'autre part, de l'expression de ε on déduit

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sum \frac{d\varepsilon_1}{dt}\cos^2\alpha + 2\sum \varepsilon_1\cos\alpha\frac{d(\cos\alpha)}{ds};$$

mais, à cause de (n° 2, premier Mémoire, p. 86),

$$\frac{(d\cos\alpha)}{dt} = \theta\cos\xi,$$

on a

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sum \frac{d\varepsilon_1}{dt}\cos^2\alpha + 2\theta\sum \varepsilon_1\cos\alpha\cos\xi;$$

mais des équations (8) on tire

$$\theta = \sum \varepsilon_1\cos\alpha\cos\xi + \theta'\cos\tau,$$

d'où

$$(10) \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \sum \frac{d\varepsilon_1}{dt}\cos^2\alpha + 2\theta^2 - 2\theta\theta'\cos\tau.$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (9) et (10), il vient

$$(11) \qquad \mathcal{E} = \sum \mathcal{E}_1\cos^2\alpha + \theta^2 - \theta'^2.$$

Telle est la relation qui donne la loi de la variation de $\mathcal{E}$ autour d'un point quelconque du système.

On peut exprimer la différence $\theta^2 - \theta'^2$ en fonction des paramètres du déplacement et de la direction (α, β, γ). On a d'abord

$$\theta' = \omega\sin(\widehat{\rho,\omega}) = \sqrt{\sum (q\cos\gamma - r\cos\beta)^2};$$

de plus, le groupe d'où l'on déduit le groupe (8) donne

$$\varepsilon^2 + \theta^2 = \sum \varepsilon_1^2 \cos^2\alpha + \theta'^2 + 2\sum \varepsilon_1 \cos\alpha (q\cos\gamma - r\cos\beta),$$

et par suite, en éliminant ε,

$$\theta^2 - \theta'^2 = 2\sum \varepsilon_1 \cos\alpha (q\cos\gamma - r\cos\beta) + \sum (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta;$$

on en conclut

$$(12)\quad \mathcal{E} = \sum \mathcal{E}_1 \cos^2\alpha - 2\sum r(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos\alpha\cos\beta + \sum(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

On voit que la variation de $\mathcal{E}$ suit une loi plus compliquée que celle de ε. Aussi, si l'on veut représenter cette loi au moyen d'une surface, on prévoit que cette surface sera du quatrième degré; en effet, si l'on pose

$$\mathcal{D}_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \mathcal{D}_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad \mathcal{D}_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdots,$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

la relation (12) devient

$$(x^2 + y^2 + z^2)(\mathcal{E}_1 x^2 + \mathcal{E}_2 y^2 + \mathcal{E}_3 z^2 - 2p\mathcal{D}_1 yz - 2q\mathcal{D}_2 zx - 2r\mathcal{D}_3 xy) + \mathcal{D}_1^2 y^2 z^2 + \mathcal{D}_2^2 z^2 x^2 + \mathcal{D}_3^2 x^2 y^2 = 1,$$

équation qui représente bien une surface du quatrième degré.

La discussion de cette surface ne saurait présenter un grand intérêt; remarquons d'ailleurs que si les différences $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ sont assez petites pour que l'on puisse négliger leurs carrés, l'équation précédente se ramène au second degré en posant

$$\mathcal{E} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Quoi qu'il en soit, je donnerai le nom de *seconde déformatrice* à la surface du second degré

$$\mathcal{E}_1 x^2 + \mathcal{E}_2 y^2 + \mathcal{E}_3 z^2 = 1,$$

qui donnerait la loi de la variation de $\mathcal{E}$ dans le cas d'une déformation sensiblement sphérique, et qui joue dans ce qui va suivre un rôle plus important que la surface qui représente véritablement la variation de $\mathcal{E}$.

6. *Paramètres mixtes.* — Les paramètres P, Q, R, qui ont pour expression $p(\varepsilon_2+\varepsilon_3)$, $q(\varepsilon_3+\varepsilon_1)$, $r(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$, peuvent être considérés comme des paramètres *mixtes* dépendant à la fois du déplacement général du système et de la déformation. Posons

$$\Omega^2 = P^2 + Q^2 + R^2, \quad \Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3;$$

soit en outre ε_ω la valeur de ε pour la direction de l'axe de rotation ω, δ_ω la distance de l'origine au plan tangent à la déformatrice première à l'extrémité du diamètre dirigé suivant l'axe de rotation; on aura

$$\Omega^2 = \sum p^2(\Theta-\varepsilon_1)^2 = \Theta^2\omega^2 - 2\Theta\sum \varepsilon_1 p^2 + \sum \varepsilon_1^2 p^2.$$

De l'expression bien connue de ε on déduit

$$\omega^2\varepsilon_\omega = \varepsilon_1 p^2 + \varepsilon_2 q^2 + \varepsilon_3 r^2;$$

d'autre part,

$$\varepsilon_1^2 p^2 + \varepsilon_2^2 q^2 + \varepsilon_3^2 r^2 = \frac{\omega^2}{\delta_\omega^2 \rho_\omega^2} = \frac{\omega^2 \varepsilon_\omega}{\delta_\omega^2}; \text{ (1)}$$

or

$$\delta_\omega = \rho_\omega \cos\varphi, \quad \varphi = (\widehat{\delta_\omega, \rho_\omega});$$

donc

$$\sum \varepsilon_1^2 p^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_\omega^2}{\cos^2\varphi} = \omega^2\varepsilon_\omega^2 \operatorname{séc}^2\varphi.$$

On aura donc enfin pour l'expression de Ω

$$\Omega^2 = \omega^2(\Theta^2 - 2\Theta\varepsilon_\omega + \varepsilon_\omega^2 \operatorname{séc}^2\varphi = \omega^2[(\Theta-\varepsilon_\omega)^2 + \varepsilon_\omega^2 \operatorname{tang}^2\varphi];$$

d'où

$$\Omega = \omega\sqrt{(\Theta-\varepsilon_\omega)^2 + \varepsilon_\omega^2 \operatorname{tang}^2\varphi}.$$

---

(1) ρ_ω désigne le rayon vecteur de la première déformatrice, suivant la direction de l'axe de rotation; et, d'après la définition de cette surface, on a $\varepsilon_\omega = \dfrac{1}{\rho_\omega^2}$.

Ω, comme P, Q, R, est donc un *paramètre mixte*, produit d'une vitesse angulaire par un coefficient de vitesse de déformation.

III. — *Décomposition de l'accélération* J'.

7. Il résulte de la simple inspection des expressions de J'_x, J'_y, J'_z que l'accélération J' peut être considérée comme la résultante de deux accélérations :

1° D'une accélération dont les projections sont

$$\mathcal{E}_1 x, \quad \mathcal{E}_2 y, \quad \mathcal{E}_3 z$$

et dont la résultante est, par conséquent,

$$\sqrt{\mathcal{E}_1^2 x^2 + \mathcal{E}_2^2 y^2 + \mathcal{E}_3^2 z^2},$$

c'est-à-dire *le demi-paramètre différentiel du premier ordre de la* SECONDE DÉFORMATRICE, *ou du moins d'une surface homothétique de celle-ci passant par le point* (x, y, z) ; *de plus, cette composante de* J' *est normale à cette surface ;*

2° D'une seconde partie dont les projections sont

$$Qz - Ry, \quad Rx - Pz, \quad Py - Qx.$$

On voit d'abord que cette seconde composante de J' est perpendiculaire au rayon vecteur ρ, car sa projection sur ce rayon vecteur est nulle. De plus, on trouve aisément qu'elle a pour valeur

$$\rho\Omega \sin\left(\widehat{\Omega,\rho}\right);$$

c'est donc une véritable accélération composée, car c'est le produit d'une vitesse angulaire par une vitesse linéaire, d'après ce que nous avons dit de Ω.

Ainsi, *dans le déplacement d'un système de points dont les vitesses sont des fonctions linéaires des coordonnées, la partie de l'accélération qui dépend des paramètres de la déformation est la résultante :* 1° *d'une accélération normale à une surface du second ordre homothétique de la seconde déformatrice, et égale au demi-paramètre différentiel du premier*

ordre de cette surface; 2° d'une accélération composée perpendiculaire au rayon vecteur et à la direction de l'accélération mixte Ω.

IV. — *Quelques théorèmes sur l'accélération.*

8. *Expression de l'accélération* J' *estimée suivant le rayon vecteur.* — Si l'on multiplie les trois expressions J'_x, J'_y, J'_z respectivement par x, y, z, et qu'on ajoute, il vient

$$x J'_x + y J'_y + z J'_z = \mathcal{E}_1 x^2 + \mathcal{E}_2 y^2 + \mathcal{E}_3 z^2 = V,$$

d'où

$$\rho . J'_\rho = V \quad \text{et} \quad J'_\rho = \frac{V}{\rho};$$

ce qui signifie qu'*en tous les points d'une surface*

$$V = c$$

l'accélération J' *estimée dans la direction du rayon vecteur est inversement proportionnelle au rayon vecteur.*

Les surfaces

$$V = c$$

sont précisément des *surfaces de niveau* par rapport à la partie de l'accélération J' qui ne dépend que des déformations du système.

9. *Expressions de l'accélération totale relative à l'origine estimée suivant le rayon vecteur.* — L'accélération relative à l'origine est la résultante des accélérations J', J''. Multiplions respectivement par x, y, z les sommes $J'_x + J''_x$, $J'_y + J''_y$, $J'_z + J''_z$, et ajoutons, il vient d'abord

$$x J'_x + y J'_y + z J'_z = \sum \mathcal{E}_1 x^2 = \rho^2 \sum \mathcal{E}_1 \cos^2\alpha.$$

$$x J''_x + y J''_y + z J''_z = -\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) + (px + qy + rz)^2 = -\rho^2 \theta'^2;$$

donc

$$J'_\rho + J''_\rho = \rho \left(\sum \mathcal{E}_1 \cos^2\alpha - \theta'^2 \right). \tag{13}$$

D'autre part, comme d'après les formules (8) la vitesse d'un point relative à l'origine a pour composantes

$$\varepsilon x + \rho\theta \cos\xi, \quad \varepsilon y + \rho\theta \cos y, \quad \varepsilon z + \rho\theta \cos\zeta,$$

on en déduit, en les différentiant,

$$\begin{aligned} J'_x + J''_y &= \left(\varepsilon^2 + \frac{d\varepsilon}{dt}\right) x + \rho\varepsilon\theta\cos\xi + \frac{d(\rho\theta\cos\xi)}{dt} \\ &= \mathcal{E}x + \rho\varepsilon\theta\cos\xi + \frac{d(\rho\theta\cos\xi)}{dt}, \end{aligned}$$

avec deux autres analogues.

Or, multiplier ces trois expressions par x, y, z revient à les multiplier par $\rho\cos\alpha$, $\rho\cos\beta$, $\rho\cos\gamma$; si l'on ajoute ensuite membre à membre, il vient

$$\sum x(J'_x + J''_x) = \mathcal{E}\rho^2 + \rho^2\varepsilon\theta\sum\cos\alpha\cos\zeta + \rho\sum\cos\alpha\,\frac{d(\rho\theta\cos\xi)}{dt}.$$

Mais on a vu (nº 5) que

$$\sum\cos\alpha\cos\xi = 0;$$

d'après cette relation, le deuxième groupe de termes de l'équation précédente disparaît; le troisième groupe se décompose en deux autres

$$\frac{d(\rho\theta)}{dt}\sum\cos\alpha\cos\xi = 0, \qquad \rho^2\theta\sum\cos\alpha\,\frac{d(\cos\xi)}{dt};$$

mais, en vertu de la relation rappelée ci-dessus, on a

$$\sum\cos\alpha\,\frac{d(\cos\xi)}{dt} = -\sum\cos\xi\,\frac{d(\cos\alpha)}{dt} = -\theta\sum\cos^2\xi = -\theta.$$

Donc enfin on trouve pour la seconde expression de $J_\rho + J''_\rho$

$$J'_\rho + J''_\rho = \rho(\mathcal{E} - \theta^2). \tag{14}$$

Le rapprochement des équations (13) et (14) nous fait précisément retomber sur la relation (11), (nº 5).

V. — *Détermination des paramètres de l'accélération.*

10. Les expressions des diverses composantes de l'accélération d'un point du système, données au nº **2** [groupes (3), (4), (5)], montrent qu'indépendamment des paramètres des vitesses, au nombre de douze, que nous avons appris à déterminer dans le premier Mémoire (V), il

s'est introduit neuf nouveaux paramètres

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt},\quad \frac{d\varepsilon_2}{dt},\quad \frac{d\varepsilon_3}{dt},\quad \frac{dp}{dt},\quad \frac{dq}{dt},\quad \frac{dr}{dt},\quad \frac{du_1}{dt},\quad \frac{du_2}{dt},\quad \frac{du_3}{dt},$$

qu'il faut déterminer pour que la loi du mouvement soit connue.

Il semble, d'après cela, qu'il suffirait de connaître, outre les vitesses de quatre points déterminés, les accélérations de trois d'entre eux; il n'en est rien cependant.

Si l'on se reporte, en effet, aux considérations géométriques du premier Mémoire, p. 112, considérations qui s'appliquent exactement aux accélérations, on voit qu'il faut absolument connaître les accélérations de quatre points pour pouvoir déterminer celle d'un autre point quelconque du système. Si le nombre des paramètres à déterminer paraît moindre que ne semblent l'indiquer les considérations géométriques, cela tient tout simplement à ce que les équations (3), (4), (5) renferment des expressions réduites, rapportées à un système d'axes particuliers, et dans lesquelles ne figurent pas les paramètres propres à fixer la position de ces axes.

On voit bien d'ailleurs qu'il en est de même pour les vitesses, car dans les équations (1) il n'entre que neuf paramètres, et nous savons cependant qu'en réalité il y en a douze à déterminer.

En particulier, dans le cas d'un système invariable, il n'entre que six paramètres dans les expressions des vitesses composantes; or il est bien facile de s'assurer directement sur ces expressions elles-mêmes qu'il ne suffit pas de connaître les vitesses et les coordonnées de deux points du système.

Sauf la longueur des calculs, provenant de la complication des coefficients des variables dans les expressions des composantes de l'accélération, la marche analytique à suivre pour la détermination des paramètres sera identiquement la même que celle qui est indiquée au n° 17 du premier Mémoire.

VI. — *Expression remarquable de la demi-dérivée du carré de la vitesse dans le cas d'une déformation statique.*

11. Si l'on suppose que le système n'ait pas de mouvement général de translation et de rotation, c'est-à-dire si l'on suppose $u_1 = 0$, $u_2 = 0$,

$u_3 = 0$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, nous aurons ce qu'on peut appeler une simple *déformation statique* du système. C'est ce qui arrive, par exemple, dans les systèmes articulés que j'ai considérés à la fin de mon premier travail.

Dans ce cas, les expressions des vitesses sont

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x, \quad \frac{dy}{dt} = \varepsilon_2 y, \quad \frac{dz}{dt} = \varepsilon_3 z;$$

d'où

$$v^2 = \varepsilon_1^2 x^2 + \varepsilon_1^2 y^2 + \varepsilon_1^2 z^2 = \delta_1^2,$$

en désignant par δ_1 le demi-paramètre différentiel du premier ordre de la première déformatrice.

Si nous différentions l'équation précédente, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} = \sum\left(\varepsilon_1^2 x \frac{dx}{dt} + \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_1}{dt} x^2\right) = \sum\left(\varepsilon_1^3 x^2 + \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_1}{dt} x^2\right) = \sum \mathcal{E}_1 \varepsilon_1 x^2.$$

Or, Δ_1 désignant le demi-paramètre différentiel de la seconde déformatrice, θ l'angle que font les normales aux deux déformatrices au point (x, y, z), on a

$$\cos\theta = \sum \frac{\varepsilon_1 x}{\delta_1}\frac{\mathcal{E}_1 x}{\Delta_1} = \frac{1}{\Delta_1 \delta_1}\sum \mathcal{E}_1 \varepsilon_1 x^2; \quad \text{donc enfin} \quad \frac{1}{2}\frac{d.v^2}{dt} = \Delta_1 \delta_1 \cos\theta.$$

Ainsi la demi-dérivée du carré de la vitesse d'un point du système dans le cas d'une déformation statique est le produit des paramètres différentiels du premier ordre des deux déformatrices et du cosinus de l'angle des normales en ce point.

Il était d'ailleurs facile de prévoir ce résultat, en remarquant que la force relative à l'unité de masse n'est autre chose que Δ_1, et que le déplacement infiniment petit du point (x, y, z) est $\delta_1 dt$ (premier Mémoire, n° 7); le travail élémentaire de la force est donc

$$\Delta_1 \delta_1 \cos\theta . dt \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} d.v^2.$$

Dans une prochaine Communication je m'occuperai des relations qui existent entre les forces diverses agissant sur le système que j'ai considéré. On trouve des résultats assez intéressants, car les forces intérieures ne peuvent plus être éliminées comme dans le cas d'un solide invariable.

NOMBRE

DES

CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES

POUR UN DÉTERMINANT DONNÉ,

PAR LE P. PÉPIN.

Cette question a été résolue par Dirichlet dans ses *Recherches sur les applications de l'Analyse à la théorie des nombres* (*Journal de Crelle*, t. XIX, p. 324, et t. XXI, p. 1 et 134).

M. Hermite a proposé dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXXV, p. 684) une simplification qui abrége notablement la solution de Dirichlet; mais si l'on veut développer les raisonnements nécessaires pour rendre la démonstration complète, on ne laisse pas que de rencontrer quelques difficultés. Par exemple, au n° V, si l'on veut démontrer que la limite du rapport

$$\sum_1^n \left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\left[\frac{n}{i}\frac{\varphi(m)}{m} + 2^{\mu-1}\varepsilon_i\right] : n \quad \text{est} \quad \sum \left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\frac{1}{i}\frac{\varphi(m)}{m},$$

il faudra démontrer que la limite de l'expression

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\varepsilon_i \quad \text{est} \quad 0.$$

Or, comme ε_i est positif ou négatif, il n'est pas évident qu'il n'aura pas ordinairement le même signe que $\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)$. Supposons, par exemple, $\varepsilon_i = \left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\alpha_i^2$; l'expression précédente devient $\frac{1}{n}\sum_1^n \alpha_i^2$, et elle a pour

limite α^2, α^2 désignant une valeur moyenne entre les diverses valeurs de α_i^2. Cette difficulté ne peut être levée sans recourir à des considérations assez délicates, qui font perdre à cette simplification une partie de ses avantages.

La solution, dont on trouvera ici le développement complet, n'emprunte à l'Analyse supérieure que les notions les plus élémentaires sur la quadrature des surfaces planes. Nous obtenons par là un théorème général, d'où nous déduisons sans peine, soit les formules données par Gauss dans deux Mémoires présentés à la Société royale de Göttingue (1824 et 1837) pour exprimer le nombre des systèmes de valeurs de x et de y, qui donnent à la forme

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

dont le déterminant est un nombre négatif, des valeurs qui ne surpassent pas une limite donnée; soit les formules analogues données par Dirichlet pour les déterminants positifs. Nous déduisons de ces formules le rapport entre les nombres de classes proprement primitives pour deux déterminants dont le rapport est un carré, ainsi que le rapport entre les nombres de classes comprises dans les deux ordres primitifs, pour un même déterminant. Le problème se trouve ainsi ramené à celui de trouver le nombre de classes proprement primitives pour un déterminant qui n'est divisible par aucun carré. Cette condition remplie par le déterminant permet de généraliser la formule employée par Dirichlet pour exprimer le nombre des représentations de n par le système des formes quadratiques diverses qui représentent l'ordre proprement primitif pour ce déterminant. Cela nous conduit à une simplification analogue à celle de M. Hermite, mais qui en diffère en ce que la fonction $\Phi(x)$ s'y trouve remplacée par la fonction plus simple $E(x)$. Grâce aux propriétés de cette fonction, nous arriverons aux formules cherchées, sans emprunter aucune notion préalable à la théorie des suites.

I.

1. Soient A l'aire comprise dans un contour donné sur un plan; u et v les coordonnées d'un point de ce plan. On aura

$$A = \int\int du\,dv.$$

On obtiendra une valeur approchée de cette aire, si, donnant à u et à v des accroissements très-petits $du = dv = \lambda$, on fait la somme d'autant de carrés λ^2 qu'il y a de systèmes de valeurs de u et de v, qui, étant prises dans les deux progressions arithmétiques $u = x\lambda$, $v = y\lambda$, correspondent à des points situés dans l'aire A. On pourra exprimer cette condition au moyen de certaines inégalités

$$(a) \qquad \varphi(x,y) < 0, \quad \varphi_1(x,y) < 0, \ldots,$$

que devront vérifier les nombres entiers x, y.

Soit m le nombre des systèmes de valeurs de x et de y, qui vérifient les conditions (a). Le produit $m\lambda^2$ représentera l'aire A avec une approximation d'autant plus grande que l'accroissement λ sera plus petit, de telle sorte qu'en représentant par ε une quantité qui s'annule avec λ on obtiendra pour l'aire A la formule

$$A + \varepsilon = m\lambda^2;$$

ou bien, en faisant $\frac{1}{\lambda^2} = M$,

$$(b) \qquad AM + M\varepsilon = m.$$

2. Transportons l'origine en un point infiniment voisin $\gamma\lambda$, $\delta\lambda$, puis désignons par u_1, v_1 les nouvelles coordonnées du point (u, v), et par $\alpha\lambda$, $\beta\lambda$ les accroissements infiniment petits du_1, dv_1. Les valeurs de u_1, v_1 seront comprises dans les deux progressions arithmétiques $\alpha\lambda x_1$, $\beta\lambda y_1$, et l'on aura

$$A = \int\int du_1\, dv_1 = \alpha\beta \int\int \lambda^2 = \alpha\beta\, m_1 \lambda^2 + \varepsilon,$$

m_1 désignant le nombre des systèmes de valeurs entières de x_1 et y_1 telles, que les valeurs correspondantes de u_1, v_1 soient les coordonnées de points situés à l'intérieur de l'aire A. Or, si, dans les formules de transformation $u = u_1 + \gamma\lambda$, $v = v_1 + \delta\lambda$, nous remplaçons u, v, u_1, v_1 par leurs valeurs $x\lambda$, $y\lambda$, $\alpha x_1 \lambda$, $\beta y_1 \lambda$, nous obtiendrons, en divisant par λ,

$$(c) \qquad x = \alpha x_1 + \gamma, \quad y = \beta y_1 + \delta.$$

Dans la dernière équation, qui peut s'écrire

$$AM + M\varepsilon = m_1 \alpha\beta \quad (\lim \varepsilon = 0 \text{ pour } M = \infty),$$

m_1 représentera le nombre des systèmes de valeurs de x et de y, qui, étant prises dans les progressions (c), satisfont aux conditions (a).

Ajoutons aux formules (c) $K - 1$ autres couples de progressions arithmétiques, de mêmes raisons α, β, mais tels que chacun d'eux diffère de tous les autres par la valeur de l'un des résidus γ ou δ. En combinant par addition K équations semblables à la dernière, nous aurons l'équation

$$\text{(I)} \qquad \frac{KAM}{\alpha\beta} + M\eta = \sum m_1 = m, \quad (\lim \eta = 0 \text{ pour } m = \infty),$$

dans laquelle m exprime le nombre des systèmes de valeurs de x et de y qui, étant prises dans les K formules semblables à (c), vérifient les conditions (a).

3. Supposons que l'aire A soit celle de l'ellipse représentée par l'équation

$$au^2 + 2buv + cv^2 = 1,$$

dans laquelle $b^2 - ac = D = -D_1 < 0$. On aura

$$A = \frac{\pi}{\sqrt{D_1}},$$

et les conditions que les nombres entiers x et y devront vérifier pour que les valeurs correspondantes de $u = x\lambda$ et $v = y\lambda$ soient les coordonnées de points intérieurs à l'ellipse se réduiront à une seule

$$\text{(A)} \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqq \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{ou} \quad M;$$

en même temps l'équation (I) deviendra

$$\text{(II)} \qquad \frac{K\pi M}{\alpha\beta\sqrt{D_1}} + M\varepsilon = m \quad (\lim \varepsilon = 0 \text{ pour } M = \infty).$$

Si dans cette formule nous faisons $K = 1$, $\alpha = \beta = 1$, nous obtenons le premier théorème de Gauss : « *Le nombre m de tous les systèmes de*

valeurs entières des indéterminées x et y pour lesquelles les valeurs d'une forme (a, b, c) *de déterminant négatif* $-D_1$ *ne dépassent pas une limite* M *est donné par la formule* $\frac{\pi M}{\sqrt{D_1}}$, *avec une approximation qui croît indéfiniment avec* M, *c'est-à-dire que, si l'on fait croître indéfiniment le nombre* M, *le rapport* $\frac{m}{M}$ *a pour limite* $\frac{\pi}{\sqrt{D_1}}$. » (Gauss, *Werke*, t. II, p. 172.)

En faisant $\alpha = \beta = 2D_1$ dans la même équation (II), et choisissant les K couples de progressions de telle sorte que la forme (a, b, c) ne prenne que des valeurs premières avec $2D_1$, et qu'elle prenne toutes celles des valeurs premières avec $2D_1$ qu'elle peut prendre, on obtiendra un second théorème de Gauss (*Werke*, t. II, p. 280) qui permet d'évaluer approximativement le nombre des systèmes de valeurs entières de x et de y qui donnent à la forme (a, b, c) des valeurs inférieures à une limite donnée et premières avec D. Ce second théorème est celui dont Dirichlet fait usage dans le Mémoire cité, et dont il donne le correspondant pour les formes de déterminant positif.

4. Supposons que la forme (a, b, c) soit proprement primitive. Nous pourrons assujettir les indéterminées x et y à ne lui donner que des valeurs impaires. Si les deux éléments extrêmes a et c sont impairs, x et y devront être pris dans les deux systèmes

$$(c') \qquad \begin{cases} x = 2x_1, \\ y = 2y_1 + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2x_1 + 1, \\ y = 2y_1; \end{cases}$$

si au contraire a et c sont de parité différente, nous prendrons pour premier élément (a) celui qui est impair, et nous exclurons les valeurs paires de la forme (a, b, c), et celles-là seules, en prenant x et y dans les deux systèmes

$$(c'') \qquad \begin{cases} x = 2x_1 + 1, \\ y = 2y_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2x_1 + 1, \\ y = 2y_1 + 1. \end{cases}$$

Dans les deux cas nous aurons

$$K = 2, \quad \alpha = \beta = 2,$$

et par suite

$$\text{(III)}\qquad \frac{M\pi}{2\sqrt{D_1}} + M\varepsilon = m \quad (\lim\varepsilon = 0 \text{ pour } M = \infty),$$

m désignant le nombre des systèmes de valeurs entières de x et de y, qui donnent à la forme (a, b, c) des valeurs impaires et inférieures à la limite M.

5. On obtiendra des théorèmes analogues pour les déterminants positifs, en remplaçant l'aire de l'ellipse par celle d'un secteur hyperbolique compris entre l'axe des x, la droite $y = \frac{aU}{T - bU}x$, et l'hyperbole représentée par l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1,$$

dans laquelle $b^2 - ac = D > 0$, $a > 0$ et $c < 0$; en supposant de plus que T et U désignent les plus petits nombres entiers et positifs qui vérifient l'équation

$$T^2 - DU^2 = e^2,$$

où nous représentons par e le plus grand diviseur commun des trois nombres a, $2b$, c. Comme nous n'aurons à considérer que des formes primitives, nous aurons toujours $c = 1$ ou 2. Pour évaluer l'aire A du secteur hyperbolique considéré, nous prendrons l'équation de l'hyperbole en coordonnées polaires,

$$\rho^2 = \frac{1}{a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi(a + 2b\operatorname{tang}\varphi + c\operatorname{tang}^2\varphi)}.$$

L'aire A sera exprimée par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int\rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\frac{d\operatorname{tang}\varphi}{a + 2b\operatorname{tang}\varphi + c\operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{1}{8\sqrt{D}}\, l\left(\frac{c\operatorname{tang}\varphi - \sqrt{D} + b}{\sqrt{D} + b + c\operatorname{tang}\varphi}\right)^2,$$

prise entre les limites $\varphi = 0$, et $\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{aU}{T - bU}$. On a donc

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{8\sqrt{D}}\left[l\left(\frac{acU + (\sqrt{D} - b)(T - bU)}{(\sqrt{D} + b)(T - bU) + acU}\right)^2 - l\left(\frac{\sqrt{D} - b}{\sqrt{D} + b}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{8\sqrt{D}}\, l\left(\frac{T + \sqrt{D}U}{T - \sqrt{D}U}\right)^2. \end{aligned}$$

On a donc, en ayant égard à l'équation $T^2 - DU^2 = e^2$,

$$A = \frac{1}{2\sqrt{D}}\, l\left(\frac{T}{e} + \frac{U}{e}\sqrt{D}\right),$$

de telle sorte que l'équation (I) devient

$$\text{(IV)} \qquad \frac{KM}{2\alpha\beta\sqrt{D}}\, l\left(\frac{T}{e} + \frac{U}{e}\sqrt{D}\right) + M\varepsilon = m \quad (\lim \varepsilon = 0 \text{ pour } M = \infty.)$$

6. Supposons que la forme (a, b, c) soit proprement primitive. On verra, comme dans le cas où D est négatif, que les valeurs de x et de y qui donnent à cette forme des valeurs impaires sont toutes comprises dans deux couples de progressions (c) ou (c'). Faisant donc $K = 2$, $\alpha = \beta = 2$, et remarquant que $e = 1$, on a

$$\text{(V)} \qquad \frac{M}{4\sqrt{D}}\, l(T + U\sqrt{D}) + M\varepsilon = m,$$

m désignant le nombre des systèmes de valeurs des indéterminées x et y qui, satisfaisant à la double inégalité

$$\text{(A')} \qquad 0 \leqq y \leqq \frac{aU}{T - bU}\, x,$$

donnent à la forme (a, b, c) des valeurs impaires et inférieures à M. Nous pouvons ajouter que toutes ces valeurs seront positives; car de l'inégalité (A')

$$ax > (T - bU)\frac{y}{U}, \quad ax + by > \frac{T}{U}y$$

on déduit

$$a(ax^2 + 2bxy + cy^2) = (ax + by)^2 - Dy^2 > \frac{(T^2 - DU^2)y^2}{U^2},$$

$$a(ax^2 + 2bxy + cy^2) > \frac{y^2}{U^2}.$$

Comme nous supposons $a > 0$, nous avons

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0.$$

II.

7. Désignons par Ω l'ensemble des formes quadratiques

$$(a, b, c), \quad (a', b', c'), \quad (a'', b'', c''), \ldots,$$

propres à représenter toutes les classes du même ordre primitif de déterminant D; par h le nombre de ces classes, par m', m'',... les nombres qui, pour les formes (a', b', c'), (a'', b'', c''),..., ont la même signification que le nombre m pour la forme (a, b, c). De plus, si le déterminant est positif, nous supposerons les premiers éléments a, a', a'',... positifs. Enfin, quand le déterminant est négatif, nous ne considérons que les formes positives.

Si les K systèmes de progressions (c) ont été choisis de manière que les valeurs (a, b, c) soient tous les nombres premiers, relativement à un nombre donné Δ, et qui peuvent être représentés par cette forme, le nombre m dans les formules (II) et (IV) sera le nombre des représentations par la forme (a, b, c) des entiers premiers avec Δ, inférieurs à la limite M, et qui, si le déterminant est positif, satisfont en outre aux inégalités (A').

Supposons que, pour donner aux diverses formes Ω toutes les valeurs premières avec Δ dont elles sont susceptibles, il faille prendre les valeurs des indéterminées x et y dans K systèmes de progressions tels que (c), et que ce nombre K, ainsi que les raisons α, β des progressions, soit le même pour toutes ces h formes Ω; les équations (II) et (IV) subsisteront pour chacune de ces formes, et l'on en déduira par addition les deux suivantes :

$$(1)\quad \frac{\mathrm{K}h\pi\mathrm{M}}{\alpha\beta\sqrt{\mathrm{D}_1}} + \mathrm{M}\varepsilon = \sum m, \qquad (2)\quad \frac{\mathrm{K}h}{2\alpha\beta\sqrt{\mathrm{D}}}\, l\left(\frac{\mathrm{T}}{\omega} + \frac{\mathrm{U}}{\omega}\sqrt{\mathrm{D}}\right) + \mathrm{M}\varepsilon = \sum m,$$

dans lesquelles $\sum m$ exprimera le nombre de toutes les représentations des nombres entiers premiers avec Δ et inférieurs à la limite M, qui de plus, si le déterminant est positif, satisfont à la double inégalité (A'), pour la forme (a, b, c), et à des inégalités semblables pour chacune des autres formes.

8. Soient e^2, e'^2 e''^2,... tous les diviseurs carrés, autres que 1, d'un nombre impair n, et désignons par $\varpi(n)$ le nombre de toutes les solutions des diverses congruences G

$$x^2 \equiv D \,(\text{mod.}\, n), \qquad x^2 \equiv D \left(\text{mod.}\, \frac{n}{e'^2}\right),$$
$$x^2 \equiv D \left(\text{mod.}\, \frac{n}{e^2}\right), \qquad x^2 \equiv D \left(\text{mod.}\, \frac{n}{e''^2}\right), \ldots$$

Si D est négatif et différent de -1, le nombre des représentations de n par l'ensemble des formes Ω, qui représentent l'ordre proprement primitif de déterminant D, sera $2\varpi(n)$; il sera $4\varpi(n)$, si $D = -1$. Si D est négatif et différent de -3, et que les formes Ω représentent l'ordre improprement primitif de déterminant D, le nombre des représentations de $2n$ par l'ensemble des formes Ω sera $2\varpi(n)$; il sera $6\varpi(n)$ si $D = -3$.

Ces théorèmes sont une conséquence immédiate des principes établis par Gauss, relativement à la représentation des nombres par les formes (*Disq.*, n° 180 et 181).

9. Si D est positif, le nombre des représentations de n ou de $2n$, suivant que l'ordre Ω est proprement ou improprement primitif, est égal à $\varpi(n)$, pourvu que chaque représentation soit assujettie à vérifier l'inégalité (A'), (6).

Soit N l'un quelconque des quotients $\frac{n}{1}\,\frac{n}{e^2}\,\frac{n}{e'^2}\cdots$, et désignons par ω le nombre 1 ou le nombre 2, suivant que l'ordre Ω est proprement ou improprement primitif. Si le nombre des représentations propres de ωN par l'ensemble des formes Ω est égal au nombre des valeurs diverses de l'expression $\sqrt{D}\,(\text{mod. N})$, et qu'on ait égard au n° 181 des *Disquisitiones*, on conclura immédiatement que le nombre de toutes les représentations, tant propres qu'impropres, du nombre ωn par les mêmes formes Ω est égal à $\varpi(n)$. Or c'est ce qui a lieu quand toutes ces représentations sont assujetties à vérifier les inégalités (A'). En effet :

Toutes les représentations propres de ωN qui appartiennent à une même valeur, l'expression $\sqrt{D}\,(\text{mod. N})$, sont données par une seule

forme (a, b, c) du système Ω, et se déduisent de l'une d'entre elles (α, β), au moyen des formules

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega x_n &= \alpha t_n - (b\alpha + c\beta)\, u_n,\\ \omega y_n &= \beta t_n + (a\alpha + b\beta)\, u_n,\\ t_n &= \frac{\omega}{2}\left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n + \frac{\omega}{2}\left(\frac{T}{\omega} - \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n,\\ u_n &= \frac{\omega}{2\sqrt{D}}\left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n - \frac{\omega}{2\sqrt{D}}\left(\frac{T}{\omega} - \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles nous supposerons α positif, ce qui est permis, puisque nous ne cherchons que les représentations dans lesquelles x et y sont des nombres positifs. Or, parmi les représentations déterminées par ces formules, il y en a toujours une et une seule qui vérifie la condition

$$(\mathrm{A}')\qquad 0 \leqq y \leqq \frac{T - bU}{aU}\, x.$$

En effet, on déduit des équations (α), entre deux représentations consécutives x_n, y_n, et x_{n-1}, y_{n-1}, les relations

$$\omega x_n = T x_{n-1} - (b x_{n-1} + c y_{n-1})\, U,\quad \omega y = T y_{n-1} + (a x_{n-1} + b y_{n-1})\, U,$$

qui résolues par rapport à y_{n-1} donnent

$$(\beta)\qquad \omega y_{n-1} = y_n (T - bU) - aU x_n.$$

Si x_n et y_n vérifient la double inégalité (A'), l'équation (β) donne $y_{n-1} \leqq 0$; et réciproquement, si l'équation (β) donne pour y_{n-1} une valeur négative ou nulle, tandis que y_n ne sera pas négatif, x_n et y_n vérifieront les conditions (A'). Or il y a toujours une valeur de n, et une seule, qui fait succéder dans la série des valeurs de y_n une valeur positive à une valeur négative ou nulle. Pour le démontrer, nous mettrons l'équation

$$a\alpha^2 + 2b\,\alpha\beta + c\beta^2 = N$$

sous les deux formes

$$(a\alpha + b\beta)^2 - D\beta^2 = aN,\quad (c\beta + b\alpha)^2 - D\alpha^2 = cN,$$

d'où, à cause des inégalités $a > 0$, $c < 0$, $N > 0$, $\alpha > 0$, on conclut

$$\sqrt{\left(\frac{b\alpha + c\beta}{\alpha}\right)^2} < \sqrt{D} < \sqrt{\left(\frac{a\alpha + b\beta}{\beta}\right)^2};$$

la valeur numérique du rapport $\frac{a\alpha + b\beta}{\beta}$ est donc supérieure à $\sqrt{D}$, tandis que $\frac{t_n}{u_n}$, ou

$$\sqrt{D}\,\frac{\left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^{2n} + 1}{\left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^{2n} - 1},$$

peut prendre une valeur numérique aussi rapprochée qu'on le veut de $\sqrt{D}$, qui est sa limite pour $n = \pm\infty$: donc, pour deux valeurs de n, numériquement très-grandes, mais de signes contraires, le produit

$$(\gamma) \qquad \beta U_n \left(\frac{t_n}{u_n} + \frac{a\alpha + b\beta}{\beta}\right) = y_n$$

prendra deux valeurs de signes contraires; car le dernier facteur aura le signe de son second terme, tandis que u_n change de signe avec n. Nous pouvons donc supposer que la valeur particulière β de y_n soit positive; dès lors, quand n variera de $-\infty$ à $+\infty$, y_n d'abord négatif finira par devenir positif; car de l'équation

$$\frac{a\alpha + b\beta}{\beta} + \frac{(b\alpha + c\beta)}{\alpha} = \frac{N}{\alpha\beta}$$

on conclut, quand β est positif, que $\frac{a\alpha + b\beta}{\beta}$, le plus grand des deux termes du premier membre, est positif : les valeurs de y_n, qui correspondent à des valeurs positives de n, seront donc elles-mêmes positives. Nous pouvons donc supposer que β est la première de ces valeurs positives, de telle sorte qu'on ait $y_{-1} \leqq 0$; l'équation (β)

$$\omega y_{-1} = \beta(T - bU) - aU\alpha$$

donnera

$$\beta \leqq \frac{aU}{T - bU}\alpha.$$

Il existe donc une représentation (α, β) de N, qui, appartenant à la valeur considérée de l'expression $\sqrt{D}$ (mod. N), vérifie les conditions (A′), et il n'y en a pas d'autres, car pour toutes les valeurs positives de n y_n reste positif: il n'y a donc plus pour y_n de passage du positif au négatif, ce qu'il fallait démontrer.

10. Les résultats obtenus dans les deux numéros précédents peuvent se résumer dans ces deux théorèmes, où nous désignerons indéfiniment par n tous les nombres impairs compris entre zéro et $\frac{M}{\omega}$ et par $\varpi(n)$ le nombre de toutes les solutions des congruences G.

1° *La valeur de* $\sum m$ *dans l'équation* (1) *est égale à* $2\sum \varpi(n)$, *excepté quand* $D = 1$, *si l'ordre* Ω *est proprement primitif, et quand* $D = 3$, *si l'ordre* Ω *est improprement primitif. Dans le premier cas* $\sum m = 4\sum \varpi(n)$, *tandis que dans le second* $\sum m = 6\sum \varpi(n)$.

2° *La valeur de* $\sum m$ *dans l'équation* (2) *est toujours égale à* $\sum \varpi(n)$.

III.

11. Quand les formes Ω représentent l'ordre proprement primitif, nous avons vu que, pour leur donner toutes les valeurs impaires dont elles sont susceptibles, il faut prendre x et y dans deux couples de progressions (c) ou (c'). Chacune des formes Ω donne lieu à une équation semblable à l'équation (III) ou à l'équation (V). L'addition de ces équations nous donnera l'une des deux formules

$$(3)\quad \frac{h\pi M}{2\sqrt{D}} + M\eta = \sum m, \qquad (4)\quad \frac{hM}{4\sqrt{D}}\, l(T + U\sqrt{D}) + M\eta = \sum m,$$

dans lesquelles η est une variable qui s'évanouit avec $\frac{1}{M}$ et la somme $\sum m$ a la valeur déterminée dans le n° 10.

Désignons par h' le nombre des classes improprement primitives de

déterminant D, et par T′, U′ les plus petits nombres entiers qui vérifient l'équation

$$T'^2 - DU'^2 = 4.$$

Pour établir les formules qui correspondent dans ce cas aux équations (3) et (4), nous allons d'abord résoudre ce problème :

« Trouver le nombre K des systèmes de progressions $x = 2u + \gamma$, $y = 2v + \delta$, dans lesquels on doit prendre x et y pour que la forme improprement primitive (a, b, c) reçoive toutes les valeurs impairement paires qu'elle peut représenter. »

Comme toute forme improprement primitive peut représenter une infinité de nombres impairement pairs, et que toute classe peut être représentée par une forme dont le premier élément soit l'un quelconque des nombres représentés par cette classe, nous pouvons supposer que dans les formes Ω les nombres $a, a', a'', \ldots$ soient impairement pairs.

Si le déterminant $b^2 - ac = D$ est de la forme $\pm 8l + 1$, ac est divisible par 8; et comme a est simplement pair, $\frac{1}{2}a$ sera impair, et $\frac{1}{2}c$ pair. Pour que le nombre $n = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2$ soit impair, il faut que les indéterminées x, y soient prises dans le système unique $x = 2u + 1$, $y = 2v$: on a donc $K = 1$.

Si, au contraire, D est de la forme $\pm 8l + 5$, ac sera de la forme $8m + h$, et par conséquent les deux nombres $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}c$ seront impairs. Le nombre n sera donc impair si les indéterminées x et y sont prises dans l'un des trois systèmes

$$\begin{cases} x = 2u + 1, \\ y = 2v + 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2u + 1 \\ y = 2v; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2u, \\ y = 2v + 1. \end{cases}$$

On a donc dans ce cas $K = 3$.

12. La valeur de K étant la même pour les h' formes Ω, nous pouvons appliquer les formules (1) et (2) du n° 7, en y faisant $\alpha = \beta = \omega = 2$, et remplaçant h, T, U par h', T′, U′. De plus, pour que la limite par rapport au nombre impair n soit la même dans les deux ordres primitifs, nous remplacerons la limite M de $2n$ par une valeur double 2M. Nous avons ainsi

$$(5)\quad \frac{Kh'\pi M}{2\sqrt{D_1}} + 2M\eta = \sum m, \qquad (6)\quad \frac{h'KM}{4\sqrt{D}}\, l\left(\frac{T'}{2} + \frac{U'}{2}\sqrt{D}\right) + 2M\eta = \sum m.$$

Puisque dans ces formules $\sum m$ a la même valeur respectivement que dans les formules (3) et (4) (*voir* n° 10), en exceptant le cas où $D = -3$, nous pouvons égaler les premiers membres, puis passer à la limite après avoir tout divisé par M. Nous obtenons ainsi les deux équations

$$h = \mathrm{K}h', \quad \text{si D est négatif et différent de } -3;$$

$$h = \mathrm{K}h' \frac{l\left(\frac{T'}{2} + \frac{U'}{2}\sqrt{D}\right)}{l(T + U\sqrt{D})}, \quad \text{si D est} > 0.$$

Pour $D = -3$, on a (10)

$$\sum m = 2\sum \varpi(n)$$

dans la formule (3), tandis que dans la formule (5)

$$\sum m = 6\sum \varpi(n);$$

on aura dans ce cas

$$3h = \mathrm{K}h'.$$

Or nous avons trouvé (11) que K est égal à 1 ou à 3 suivant que D est de la forme $\pm 8l + 1$, ou de la forme $\pm 8l + 5$. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Le nombre des classes pour un déterminant négatif est le même dans les deux ordres primitifs, si le déterminant changé de signe est de la forme $8l + 7$; *si, au contraire, il est de la forme* $8l + 8$, *l'ordre proprement primitif contient trois fois plus de classes que l'ordre improprement primitif.*

Le déterminant $D = -3$ fait exception; les deux ordres primitifs de déterminant -3 renferment chacun une seule classe.

13. Si D est positif et de la forme $8l + 1$, l'équation

$$T'^2 - DU'^2 = 4$$

n'admet pas de solutions en nombres impairs; on a donc

$$T' = 2T, \quad U' = 2U;$$

et comme dans ce cas $K = 1$, la formule précédente donne $h = h'$. Donc

« Pour un déterminant positif $8l+1$, les deux ordres primitifs renferment le même nombre de classes. »

Si $D = 8l+5$, $K = 3$; mais il faut distinguer deux cas, suivant que l'équation

$$T'^2 - DU'^2 = 4$$

est possible, oui ou non, en nombres impairs. Dans le premier cas, on aura la relation

$$T + U\sqrt{D} = \left(\frac{T'}{2} + \frac{U'}{2}\sqrt{D}\right)^3,$$

d'où

$$\frac{l\left(\frac{T'}{2} + \frac{U'}{2}\sqrt{D}\right)}{l(T + U\sqrt{D})} = \frac{1}{3}, \quad h = \frac{Kh'}{3} = h'.$$

Dans le second cas on aura

$$T' = 2T, \quad U' = 2U,$$

et par conséquent $h = 3h'$. Donc

Pour un déterminant positif $8l+5$ *le nombre des classes proprement primitives est ou égal à celui des classes improprement primitives, ou triple de ce dernier nombre, suivant que l'équation*

$$T'^2 - DU'^2 = 4$$

n'admet pas de solutions en nombre impair, ou qu'elle en admet.

Gauss fait remarquer que, sur 75 nombres de la forme $8l+5$ et inférieurs à 600, il y en a 16 pour lesquels l'ordre proprement primitif renferme trois fois plus de classes que l'ordre improprement primitif, et 59 pour lesquels les deux ordres primitifs admettent le même nombre de classes.

IV.

14. Les équations (1) et (2) déterminent aussi le rapport des nombres de classes pour deux déterminants dont le rapport est un carré. Pour l'obtenir, nous devons d'abord résoudre le problème suivant :

« Déterminer le nombre K des systèmes de progressions $x = 2pu + \gamma$, $y = 2pv + \delta$, dans lesquels il faut prendre les indéterminées x, y, pour donner à la forme proprement primitive (a, b, c) toutes les valeurs premières avec $2p$ dont elle est susceptible. Nous désignons par p un nombre premier impair. »

Comme les résidus γ et δ doivent être pris dans la suite $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 2p-1$, le nombre de tous les systèmes possibles est $4p^2$; mais, pour obtenir le nombre K, il faut retrancher de $4p^2$ le nombre de tous ceux de ces systèmes qui rendent (a, b, c) divisible par 2 ou par p. Or on a

$$a(ax^2 + 2bxy + cy^2) = (ax + by)^2 - Dy^2 = an.$$

Comme le nombre a est impair, on ne peut rendre n impair qu'en prenant γ et δ dans l'un des deux systèmes

$$\gamma = 2\xi + 1, \quad \delta = 2\eta; \quad \text{ou} \quad \gamma = 2\xi + \alpha, \quad \delta = 2\eta + 1.$$

Dans le second système α est égal à 1 ou à zéro, suivant que c est pair ou impair; mais il faut exclure de ces deux systèmes toutes les valeurs de ξ et η qui vérifient respectivement les deux congruences

$$[a(2\xi + 1) + 2b\eta]^2 - 4D\eta^2 \equiv 0 \pmod{p},$$
$$[a(2\xi + \alpha) + b(2\eta + 1)]^2 - D(2\eta + 1)^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

1° $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$. Chacune de ces congruences n'admet qu'une seule solution, savoir la première

$$\eta = 0, \quad 2\xi + 1 = p,$$

et la seconde

$$2\eta + 1 = p, \qquad 2\xi + \alpha = p \text{ ou } 0, \quad \text{suivant que } \alpha = 1 \text{ ou } 0;$$

donc

$$K = 2p^2 - 2 = 2(p^2 - 1).$$

2° $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$. Pour chaque valeur de η comprise entre 1 et $p-1$, inclusivement, la première congruence fait correspondre deux solutions,

tandis qu'il n'y en a qu'une seule quand $\eta = 0$, savoir

$$\xi = \frac{p-1}{2}.$$

De même la seconde congruence donne une seule solution quand $\eta = \frac{p-1}{2}$, et deux pour toutes les autres valeurs. Le nombre des solutions de chaque congruence est donc

$$2(p-1)+1 = 2p-1;$$

donc

$$K = 2p^2 - 4p + 2 = 2(p-1)^2.$$

3° $D \equiv 0 \pmod{p}$. Les deux congruences considérées se réduisent aux suivantes :

$$a(2\xi+1) + 2b\eta \equiv 0, \quad a(2\xi+\alpha) + b(2\eta+1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pour chaque valeur de η, chacune de ces formules détermine pour ξ une valeur unique; ce qui fait en tout $2p$ solutions. Donc

$$K = 2p^2 - 2p = 2p(p-1).$$

15. Cette valeur de K étant indépendante des coefficients de la forme (a, b, c), nous pouvons appliquer ici les formules (1) et (2) en y faisant $\alpha = \beta = 2p$.

Prenons d'abord deux déterminants négatifs D et Dp^2. Désignons par h' le nombre des classes proprement primitives pour le dernier déterminant, et par K′ le nombre des systèmes de progressions $2pu + \gamma$, $2pv + \delta$, dans lesquels il faut prendre les valeurs des indéterminées pour obtenir tous les nombres entiers premiers avec $2p$, qui peuvent être représentés par les formes proprement primitives de déterminant Dp^2. Enfin désignons par $\varpi_1(n)$ le nombre de toutes les solutions des congruences

$$(\text{G}') \quad x^2 \equiv Dp^2 \pmod{n}, \quad x^2 \equiv Dp^2 \left(\text{mod.} \frac{n}{e^2}\right), \quad x^2 \equiv Dp^2 \left(\text{mod.} \frac{n}{e'^2}\right) \cdots,$$

qui correspondent aux congruences (G) du n° 7. Comme le module n est premier avec p, toutes ces congruences admettent les mêmes nom-

bres de solutions que les congruences (G) auxquelles elles correspondent respectivement. On a donc $\varpi_1(n) = \varpi(n)$, et par suite $\sum m$ conserve dans l'équation (1) la même valeur, quel que soit celui des deux déterminants D et Dp^2 auquel on l'applique. On aura donc

$$\frac{Kh\pi}{4p^2\sqrt{D_1}} = \frac{K'h'\pi}{4p^2\sqrt{D_1}} + \varepsilon' - \varepsilon, \quad \lim\varepsilon' = \lim\varepsilon = 0,$$

d'où

$$h' = ph\frac{K}{K'}.$$

Or, d'après le numéro précédent, $K' = 2p(p-1)$ (3°), tandis que K a l'une des valeurs $2(p^2-1)$, $2(p-1)^2$ ou $2p(p-1)$, suivant que l'on a $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, ou $D \equiv 0 \pmod{p}$. On a donc respectivement dans ces trois cas

$$h' = (p+1)h, \quad h' = (p-1)h, \quad h' = ph.$$

On peut réunir ces trois formules en une seule

$$h' = p\left[1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}\right]h, \tag{7}$$

pourvu que l'on convienne de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{D}{p}\right)$ quand D est divisible par p.

16. De même, quand D est positif et qu'on applique l'équation (2) aux déterminants D et Dp^2, on reconnaît que $\sum m$ a la même valeur dans les deux cas; car les raisonnements précédents pour établir l'égalité $\varpi_1(n) = \varpi(n)$ sont indépendants du signe de D. Nous avons donc

$$\frac{KhM}{8p^2\sqrt{D}}\,l(T + U\sqrt{D}) + M\varepsilon = \frac{K'h'M}{8p^2\sqrt{D}}\,l(T' + U'p\sqrt{D}) + M\varepsilon';$$

d'où

$$h' = hp\left[1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\frac{l(T + U\sqrt{D})}{l(T' + U'p\sqrt{D})}, \tag{8}$$

T′ et U′ désignant les plus petits nombres entiers et positifs qui vérifient l'équation

$$T'^2 - p^2 DU'^2 = 1.$$

17. Le rapport des nombres de classes proprement primitives pour deux déterminants D et 4D se déduit immédiatement des formules (III) et (V), en remarquant que, les deux congruences

$$x^2 \equiv D\left(\text{mod.}\ \frac{n}{e^2}\right) \quad \text{et} \quad x^2 \equiv 4D\left(\text{mod.}\ \frac{n}{e^2}\right)$$

ayant le même nombre de solutions, $\sum m$ conserve la même valeur quand on passe du déterminant D au déterminant 4D. On a donc

$$\frac{h\pi}{2\sqrt{D_1}} = \frac{h'\pi}{4\sqrt{D_1}} + \varepsilon' - \varepsilon, \quad \frac{h}{4\sqrt{D}}\, l\,(T + U\sqrt{D}) \pm \frac{h'}{8\sqrt{D}}\, l\,(T' + 2U'\sqrt{D}) + \varepsilon' - \varepsilon,$$

d'où, en passant à la limite,

$$(9) \quad h' = 2h, \quad \text{si } D = -D_1 < 0; \quad h' = 2h\,\frac{l\,(T + U\sqrt{D})}{l\,(T' + 2U'\sqrt{D})}, \quad \text{si } D > 0.$$

T′ et U′ sont les plus petits nombres entiers et positifs qui vérifient l'équation

$$T'^2 - 4DU'^2 = 1.$$

18. Les formules précédentes conduisent sans peine au rapport des nombres de classes pour deux déterminants D et DS^2. Soient h et h' ces deux nombres, et

$$S = 2^\nu p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots q^\beta q'^{\beta'} \ldots$$

$p, p', \ldots$ désignant des nombres premiers diviseurs de D, $q, q', \ldots$ des nombres premiers non diviseurs de D. On passera du déterminant D au déterminant DS^2, en multipliant successivement par les carrés des facteurs premiers de S, et à chaque multiplication les formules (7), (8) ou (9) feront connaître comment varie le nombre des classes.

Supposons $D < 0$. On passe du déterminant D au déterminant $2^{2\nu}D$, en multipliant ν fois par 4. Chaque multiplication double le nombre des classes. Le nombre h_1 pour le déterminant $2^{2\nu}D$ sera donc $2^\nu h$.

On passera du déterminant $2^{2\nu}D$ au déterminant $2^{2\nu}p^{2\alpha}D$, en multipliant α fois par p^2. Comme à chaque multiplication le nombre des classes est multiplié par p, il devient $2^\nu p^\alpha h$. Il en est de même pour les autres facteurs $p', p'', \ldots$. Posons $2^{2\nu} 2^{2\alpha} p'^{2\alpha'} \ldots D = D_1$; le nombre des classes de déterminant D_1 sera donc $2^\nu p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots h$.

Or on passe du déterminant D_1 au déterminant $D_1 q^{2\beta}$ en multipliant β fois par q^2. A la première multiplication le nombre des classes est multiplié par $q\left[1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q}\right]$, et à chacune des multiplications suivantes il est multiplié par q. Il deviendra donc

$$2^\nu p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots q^\beta\left[1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q}\right] h.$$

De même, lorsqu'on multiplie le déterminant par $q'^{2\beta'}, q''^{2\beta''}, \ldots$, le nombre des classes est lui-même multiplié respectivement par $q'^{\beta'}\left[1-\left(\frac{D}{q'}\right)\frac{1}{q'}\right], q''^{\beta''}\left[1-\left(\frac{D}{q''}\right)\frac{1}{q''}\right], \ldots$ On a donc l'équation

$$h' = h S \Pi\left[1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q}\right], \tag{10}$$

où Π indique le produit de toutes les valeurs que prend le binôme $1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q}$, lorsqu'on égale q aux diviseurs premiers inégaux de S, qui ne sont pas en même temps diviseurs de D.

19. Pour un déterminant positif D, nous poserons

$$S = m\, m'\, m'' \ldots m_i,$$

en désignant par $m, m', m'', \ldots$ tous les facteurs premiers tant égaux qu'inégaux, du nombre S; et nous représenterons par T, U; τ, υ; τ', υ'; τ'', υ''; .... T', U' les plus petits nombres entiers et positifs, qui vérifient respectivement les équations

$$T^2 - DU^2 = 1,\quad \tau^2 - D m^2 \upsilon^2 = 1,\quad \tau'^2 - D m^2 m'^2 \upsilon'^2 = 1,$$
$$\tau''^2 - D m^2 m'^2 m''^2 \upsilon''^2 = 1, \ldots\quad T'^2 - DS^2 U'^2 = 1.$$

Lorsqu'on passera du déterminant D aux déterminants Dm^2, $Dm^2m'^2$,

$Dm^2 m'^2 m''^2, \ldots DS^2$, le nombre des classes h sera multiplié successivement (16) par les facteurs

$$m\left[1-\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\right]\frac{l(T+U\sqrt{D})}{l(\tau+\upsilon m\sqrt{D})}.$$

$$m'\left[1-\left(\frac{Dm^2}{m'}\right)\frac{1}{m'}\right]\frac{l(\tau+\upsilon m\sqrt{D})}{l(\tau'+\upsilon' m m'\sqrt{D})},$$

$$m''\left[1-\left(\frac{Dm^2m'^2}{m''}\right)\frac{1}{m''}\right]\frac{l(\tau'+\upsilon' m m'\sqrt{D})}{l(\tau''+\upsilon'' m m' m''\sqrt{D})},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$m_i\left[1-\left(\frac{\frac{1}{m_i}2DS^2}{m_i}\right)\frac{1}{m_i}\right]\frac{l\left(\tau_{i-1}+\upsilon_{i-1}\frac{S}{m^i}\sqrt{D}\right)}{l(T'+U'S\sqrt{D})}.$$

On aura donc, en supprimant les facteurs communs, et réduisant à zéro le symbole $\left(\frac{M}{p}\right)$ quand M est divisible par p,

$$h' = hS\Pi\left[1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q}\right]\frac{l(T+U\sqrt{D})}{l(T'+U'S\sqrt{D})}. \tag{11}$$

Les formules (10) et (11), jointes aux résultats obtenus dans les n^{os} 12 et 13, ramènent la recherche du nombre des classes de formes quadratiques de même déterminant et de même ordre au cas où le déterminant n'est divisible par aucun carré, et où l'ordre considéré est proprement primitif. Elles font aussi connaître le rapport des nombres de classes pour deux déterminants dont le rapport est le carré d'un nombre rationnel quelconque.

V.

20. Posons $D = S^2 \mathfrak{D}$, S^2 désignant le plus grand carré qui divise D, et continuons à exprimer par $\varpi(n)$ le nombre des solutions de toutes les congruences G (n° 8). Les recherches suivantes ont pour point de départ la formule

$$\varpi(n) = \sum\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right),$$

dans laquelle le signe $\sum$ s'étend à tous les diviseurs de n, désignés indéfiniment par i. Quand le nombre n est premier à $2D$, elle revient aux deux théorèmes démontrés par Dirichlet au paragraphe VII du Mémoire cité (CRELLE, t. XXI, p. 1). Mais nous avons besoin de l'étendre à des valeurs impaires quelconques de n, dans le cas où $S = 1$.

Nous allons d'abord la démontrer pour une valeur quelconque S, mais en supposant n premier à $2D$. Nous reproduisons cette démonstration de Dirichlet pour ne pas obliger le lecteur à recourir à un recueil étranger.

Supposons d'abord que tous les facteurs premiers de n soient diviseurs de la formule $x^2 - \mathbb{D}$; et posons

$$n = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3} \cdots$$

Chacune des congruences $x^2 - \mathbb{D} \equiv 0 \left(\bmod.\, \frac{n}{e^2}\right)$ admet un nombre de solutions égal à 2^μ, en désignant par μ le nombre des facteurs premiers inégaux du quotient $\frac{n}{e^2}$. Tout se réduit donc à faire la somme des diverses puissances 2^μ, qui correspondent à toutes les valeurs différentes de $\frac{n}{e^2}$. Pour cela, considérons le polynôme

$$F_1 = 2f_1^{\lambda_1} + 2f_1^{\lambda_1 - 2} + 2f_1^{\lambda_1 - 3} + \ldots$$

qui doit être continué tant que les exposants ne sont pas négatifs, et dans lequel le coefficient du dernier terme est supposé égal à 2 ou à 1, suivant que l'exposant de ce terme est 1 ou 0. Le produit développé de ce polynôme et des polynômes analogues relatifs à f_2, f_3,... étant évidemment composé de tous les termes de la forme $2^\mu - \frac{n}{e^2}$, on obtiendra la somme des puissances 2^μ en remplaçant les nombres f_1, f_2, f_3,... par l'unité. Mais par ce changement les nombres F_1, F_2,... deviennent $\lambda_1 + 1$, $\lambda_2 + 1$,.... Donc la somme cherchée est égale à $(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_3 + 1)\ldots$, c'est-à-dire au nombre des diviseurs de n. Comme ce dernier nombre est égal à $\sum \left(\frac{\mathbb{D}}{i}\right)$, le théorème est démontré dans ce premier cas.

Supposons maintenant

$$n = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \dots g_1^{\nu_1} g_2^{\nu_2} \dots,$$

en désignant par g les diviseurs premiers de n dont ϖ n'est pas résidu. Parmi les congruences G, dont la forme générale est

$$x^2 \equiv \mathrm{D} \left(\text{mod.}\ \frac{n}{e^2}\right),$$

il n'y aura de possibles que celles dans lesquelles le quotient $\frac{n}{e^2}$ ne renferme que des facteurs du premier genre f. Pour que cette condition soit remplie, il faut que e^2 soit multiple de $g_1^{\nu_1} g_2^{\nu_2} \dots$, ce qui exige que tous les exposants $\nu_1, \nu_2, \dots$ soient pairs; et dans ce cas

$$\varpi(n) = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_3 + 1)\dots;$$

si au contraire l'un des exposants ν_1, $\nu_2 \dots$ est impair, aucune des congruences G n'est possible; de sorte que $\varpi(n) = 0$. Nous devons donc prouver que la somme $\sum \left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)$ se réduit à $(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_3 + 1)\dots$ dans le premier cas et à 0 dans le second. Pour cela faisons le produit des polynômes

$$1 + f_1 + f_1^2 + \dots + f_1^{\lambda_1}, \quad 1 + f_2 + f_2^2 + \dots + f_2^{\lambda_2}, \dots \quad 1 + g_1 + g_1^2 + \dots + g_1^{\nu_1}, \dots,$$

dont les termes sont les diviseurs de n. L'un quelconque de ces diviseurs étant désigné par K, on a $\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{K}}\right) = 1$ ou $\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{K}}\right) = -1$, suivant que le nombre des facteurs g contenus dans K est pair ou impair. La somme $\sum \left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)$ est donc égale à la valeur que prend le produit

$$(1 + f_1 + f_1^2 + \dots + f_1^{\lambda_1})(1 + f_2 + f_2^2 + \dots + f_2^{\lambda_2}) \dots (1 + g_1 + g_1^2 + \dots + g_1^{\nu_1}) \dots$$

lorsqu'on y remplace $f_1, f_2, \dots$ par 1, $g_1, g_2, \dots$ par -1; donc

$$\sum \left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right) = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_3 + 1) \dots \frac{(-1)^{\nu_1} + 1}{2} \frac{(-1)^{\nu_2} + 1}{2} \dots.$$

Or il est évident que cette expression se réduit à $(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\ldots$ quand tous les exposants $\nu_1, \nu_2, \ldots$ sont pairs, et à o quand l'un de ces exposants est impair. Donc :

THÉORÈME. — *Si* $D = \mathfrak{D}S^2$, S^2 *désignant le plus grand carré que divise* D, *et que* $\varpi(n)$ *représente le nombre de toutes les solutions des congruences*

$$(G) \qquad x^2 \equiv D(\text{mod.}\, n), \quad x^2 \equiv D\left(\text{mod.}\, \frac{n}{e^2}\right), \quad x^2 \equiv D\left(\text{mod.}\, \frac{n}{e'^2}\right), \ldots,$$

dans lesquelles n est un nombre premier avec 2D, *dont tous les diviseurs carrés, autres que* 1, *sont* e^2, $e'^2, \ldots$, *le nombre* $\varpi(n)$ *est exprimé par la formule*

$$(12) \qquad \varpi(n) = \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right),$$

où la somme $\sum$ *doit être étendue à tous les diviseurs i de n.*

Ce théorème, combiné avec celui du n° **10**, donne les deux théorèmes de Dirichlet.

21. Soit $S = 1$, et par conséquent $D = \mathfrak{D}$. La formule (12) subsiste dans le cas même où n n'est pas premier avec $\mathfrak{D}$, pourvu que l'on convienne de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right)$, lorsque i n'est pas premier avec $\mathfrak{D}$. En effet, posons

$$n = n' K l^2,$$

n' désignant un nombre impair premier avec $\mathfrak{D}$, K et l ne renfermant que des facteurs premiers diviseurs de $\mathfrak{D}$, et K n'étant divisible par aucun carré. La congruence

$$x^2 \equiv \mathfrak{D}\left(\text{mod.}\, \frac{n}{e^2}\right)$$

est évidemment impossible, si le quotient $\frac{n}{e^2}$ renferme le carré d'un facteur premier de $\mathfrak{D}$; elle n'est donc possible qu'autant que $e = \mu l$. Les seules congruences possibles parmi les congruences (G), sont donc celles

qui se rapportent aux modules $n'\mathrm{K}$, $\frac{n'\mathrm{K}}{\mu^2}$, $\frac{n'\mathrm{K}}{\mu'^2}$, ... Donc

$$\varpi(n) = \varpi(n'\mathrm{K}).$$

D'ailleurs le nombre des solutions de la congruence

$$x^2 \equiv \mathrm{D} \left(\text{mod.}\, \frac{n'\mathrm{K}}{\mu^2}\right)$$

est le même que celui de la congruence

$$\mathrm{K}x_1^2 \equiv \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{K}} \left(\text{mod.}\, \frac{n'}{\mu^2}\right);$$

car dans la première congruence x doit être divisible par K. Or les deux congruences

$$\mathrm{K}x_1^2 \equiv \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{K}} \left(\text{mod.}\, \frac{n'}{\mu^2}\right), \quad \text{et} \quad x^2 \equiv \mathrm{D} \left(\text{mod.}\, \frac{n'}{\mu^2}\right)$$

admettent le même nombre de solutions. Comme en outre les diviseurs carrés μ^2, μ'^2,... de $n'\mathrm{K}$ sont les diviseurs de n', le nombre $\varpi(n'\mathrm{K})$ de toutes les solutions des congruences

$$x^2 \equiv \mathrm{D} (\text{mod.}\, n'\mathrm{K}), \quad \left(\text{mod.}\, \frac{n'\mathrm{K}}{\mu^2}\right), \quad \left(\text{mod.}\, \frac{n'\mathrm{K}}{\mu'^2}\right), \ldots$$

est le même que le nombre de toutes les solutions des congruences

$$x^2 \equiv \mathrm{D} (\text{mod.}\, n'), \quad \left(\text{mod.}\, \frac{n'}{\mu^2}\right), \quad \left(\text{mod.}\, \frac{n'}{\mu'^2}\right), \ldots.$$

On a donc

$$\varpi(n) = \varpi(n').$$

Or la formule (12) est applicable au nombre n'. D'un autre côté, la convention qui réduit à zéro le symbole $\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)$, quand les nombres D et i ne sont pas premiers entre eux, réduit la somme $\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)$, étendue à tous les diviseurs i de n, aux seuls termes qui se rapportent aux diviseurs de n'. On a donc toujours

$$\varpi(n) = \sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right).$$

22. Problème. — *Trouver la limite du rapport $\frac{\sum\varpi(n)}{\mu}$, quand μ croît indéfiniment, et que la somme indiquée au numérateur s'étend à toutes les valeurs impaires de n, qui ne surpassent pas la limite μ.*

En remplaçant $\varpi(n)$ par la valeur que nous venons de trouver, on obtient

$$\sum\varpi(n)=\sum\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right).$$

La première somme se rapporte au nombre impair n, que l'on fait varier de 1 à μ, et, pour chaque valeur de n, la seconde somme s'étend à tous les diviseurs i de n. Or le nombre de fois que le même terme $\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)$ entrera dans cette double somme est égal au nombre des termes divisible par i dans la suite des nombres impairs 1, 3, 5,... qui ne surpassent pas la limite μ. Or, en supposant μ impair, ce nombre est $\mathrm{E}\left(\frac{\mu+i}{2i}\right)$, $\mathrm{E}(x)$ désignant le plus grand nombre entier contenu dans x. En effet, posons

$$\mu=2i\mathrm{K}+2r-1.$$

La suite des nombres impairs 1, 3, 5,..., μ pourra se partager en groupes de i termes chacun, à l'exception du dernier groupe qui n'aura que r termes :

$$\begin{gathered}
1,\ 3,\ 5,\ldots,\ i,\ldots,\ 2i-1,\\
2i+1,\ 2i+3,\ldots,\ 3i,\ldots,\ 4i-1,\\
(2\mathrm{K}-2)i+1,\ (2\mathrm{K}-2)i+3,\ldots,\ (2\mathrm{K}-1)i,\ldots,\ 2\mathrm{K}i-1,\\
2\mathrm{K}i+1,\ 2\mathrm{K}i+3,\ldots,\ 2\mathrm{K}i+2r-1.
\end{gathered}$$

Chaque groupe de i termes contient un multiple de i, et un seul, tandis que le dernier groupe n'en contient aucun si $r<\frac{i+1}{2}$, et un seul si $r\geqq\frac{i+1}{2}$. Le nombre des multiples impairs de i compris entre 1 et μ est donc K dans le premier cas, et K + 1 dans le second cas; or c'est aussi la valeur de la formule $\mathrm{E}\left(\frac{\mu+1}{2i}\right)$; car on a

$$\mathrm{E}\left(\frac{\mu+i}{2i}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{2\mathrm{K}i+2r-i+i}{2i}\right)=\mathrm{K}+\mathrm{E}\left(\frac{r+\frac{i-1}{2}}{i}\right).$$

Nous pouvons donc poser

$$\sum \varpi(n) = \sum_1^{\mu} \left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right) \mathrm{E}\left(\frac{\mu+i}{2i}\right).$$

Soit $\mu = 8\,\mathrm{D}\,n^2 - 1$, et partageons la somme précédente en deux parties, l'une comprenant toutes les valeurs impaires de i, comprises de 1 à $8\mathrm{D}n - 1$, et l'autre s'étendant de $8\mathrm{D}\,n+1$ à $8\,\mathrm{D}n^2 - 1$. Celle-ci pourra se partager en sommes partielles dont chacune s'étendra aux valeurs de i comprises entre deux multiples consécutifs de $8\,\mathrm{D}$; elle sera ainsi exprimée par la double somme

$$\text{(A)} \qquad \sum_{\mathrm{K}=n}^{n^2-1} \sum_1^{8\mathrm{D}-1} \left(\frac{\mathrm{D}}{l}\right) \mathrm{E}\left(\frac{8\mathrm{K}\mathrm{D}+\mu+l}{16\mathrm{K}\mathrm{D}+2l}\right),$$

dans laquelle nous écrivons $\left(\frac{\mathrm{D}}{l}\right)$ au lieu de $\left(\frac{\mathrm{D}}{8\mathrm{K}\mathrm{D}+l}\right)$, à cause de l'égalité de ces deux expressions.

Si, pour une valeur de K, le second facteur $\mathrm{E}\left(\frac{\mu+8\mathrm{K}\mathrm{D}+l}{16\mathrm{K}\mathrm{D}+2l}\right)$ ne change pas de valeur quand on fait varier l de 1 à $8\,\mathrm{D}-1$, la somme partielle correspondante est nulle; car on a

$$\text{(B)} \qquad \sum_1^{8\mathrm{D}-1} \left(\frac{\mathrm{D}}{l}\right) = 0.$$

D'ailleurs ce facteur ne peut changer qu'une fois de valeur dans l'une quelconque des sommes partielles qui, dans la formule (A), correspondent aux diverses valeurs de K. Supposons en effet que, pour une valeur de K, il y ait deux changements de valeurs; désignons par m la première valeur, et posons, pour abréger, $8\mathrm{K}\mathrm{D}+1 = p$; on aurait les deux inégalités

$$m+1 > \frac{\mu+p}{2p} > m, \quad m-1 > \frac{\mu+p+8\mathrm{D}-2}{2p+16\mathrm{D}-4} > m-2;$$

d'où

$$\frac{\mu+p}{2p} - \frac{\mu+p+8\mathrm{D}-2}{2p+16\mathrm{D}-4} > m-(m-1),$$

$$\mu(8\mathrm{D}^2-2) > p(2p+16\mathrm{D}-4),$$

et *a fortiori*

$$8n^2\mathrm{D}.8\mathrm{D} > 2p^2 > 2\,8^2\mathrm{D}^2 n^2,$$

puisque $K \gtreqqless n$. Cette inégalité étant impossible, le second facteur dans la formule (A) ne peut changer qu'une seule fois de valeur dans l'une quelconque des sommes partielles qu'elle renferme. Soit f la valeur de l pour laquelle s'opère un changement de valeur. On aura, en se rappelant la formule (B),

$$\sum_1^{8\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{l}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\mu+8\mathrm{K}\mathrm{D}+l}{16\mathrm{K}\mathrm{D}+2l}\right)=m\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{l}\right)-\sum_f^{8\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{l}\right)$$
$$=-\sum_f^{8\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{l}\right)=\sum_1^{f}\left(\frac{\mathrm{D}}{l}\right).$$

La valeur numérique de cette somme partielle est donc inférieure à $2\mathrm{D}$, et, par conséquent, on pourra l'exprimer par la formule $2\varepsilon\mathrm{D}$, ε désignant un nombre compris entre -1 et $+1$.

Or pour $K=n$ on a

$$\mathrm{E}\left(\frac{\mu+8n\mathrm{D}+1}{16n\mathrm{D}+2}\right)<\frac{1}{2}n+1,$$

et pour $K=n^2-1$,

$$l=8\mathrm{D}-1,\quad \mathrm{E}\left(\frac{\mu+8\mathrm{K}\mathrm{D}+l}{16\mathrm{K}\mathrm{D}+2l}\right)=1;$$

donc, dans l'étendue de la somme (A), ce facteur ne peut pas changer de valeur pour un nombre de sommes partielles supérieur à $\frac{1}{2}n$. Chacune de ces sommes partielles ayant une valeur numérique inférieure à $2\mathrm{D}$, et toutes les autres se réduisant à zéro, on aura

$$\sum_{8n\mathrm{D}+1}^{\mu}\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\mu+i}{2i}\right)=n\mathrm{D}\varepsilon,$$

ε étant compris entre -1 et $+1$. D'un autre côté,

$$\sum_1^{8n\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\mu+i}{2i}\right)=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\frac{\mu}{i}+\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\varepsilon_i,\quad -1<\varepsilon_i<1,$$

chaque produit $\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)$ étant inférieur à l'unité, tantôt positif et tantôt négatif, il est évident que la somme $\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\varepsilon_i$ est inférieure numéri-

quement au nombre de ses termes $4n\mathrm{D}$. On a donc

$$\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\mu+i}{2i}\right)=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\frac{\mu}{i}+4n\mathrm{D}\varepsilon_1+n\mathrm{D}\varepsilon,$$

ε et ε_1 étant compris entre -1 et $+1$. Si l'on divise par $\mu=8n^2\mathrm{D}-1$, et qu'on fasse croître n indéfiniment, on trouve

$$(13)\qquad \lim\frac{1}{\mu}\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\mu+i}{2i}\right)=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\frac{1}{i}=\lim\frac{\Sigma\varpi(n)}{\mu}.$$

23. Nous avons vu (**10**) que, pour l'ordre proprement primitif du déterminant négatif D, le nombre $\sum m$ dans l'équation (1) est égal à $2\sum\varpi(n)$ ou à $4\sum\varpi(n)$, suivant que l'on a $-\mathrm{D}>1$, ou $-\mathrm{D}=1$. De plus, pour nous mettre dans l'hypothèse de la formule (13) où n reçoit toutes les valeurs impaires inférieures à μ, il faut (n° **4**) poser $\alpha=\beta=\mathrm{K}=2$. L'équation (1) deviendra donc

$$\frac{h\pi\mathrm{M}}{2\sqrt{-\mathrm{D}}}+\mathrm{M}\eta=2\sum\varpi(n)=\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\frac{\mu}{i}+n\mathrm{D}(4\varepsilon_1+\varepsilon).$$

En divisant par $\mu=8n^2\mathrm{D}-1$, et faisant tendre n vers ∞, on obtient

$$h=\frac{2\sqrt{-\mathrm{D}}}{\pi}\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\frac{1}{i}.$$

Cette équation, jointe à l'équation (10), donne, pour exprimer le nombre h des classes proprement primitives du déterminant négatif $\mathrm{D}\mathrm{S}^2$, la formule

$$(14)\qquad h=\frac{2\mathrm{S}\sqrt{-\mathrm{D}}}{\pi}\Pi\left[1-\left(\frac{\mathrm{D}}{q}\right)\frac{1}{q}\right]\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\frac{1}{i}.$$

Si $\mathrm{D}=-1$, il faut doubler le second membre de cette équation.

24. De même, si D est positif, l'équation (2), dans laquelle on fera $\alpha=\beta=\mathrm{K}=2$, afin que le nombre n puisse recevoir toutes les valeurs impaires inférieures à la limite M, pourra se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{h\mathrm{M}}{4\sqrt{\mathrm{D}}}l(\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{\mathrm{D}})+\mathrm{M}\eta=\sum\varpi(n)=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{i}\right)\frac{\mu}{i}+n\mathrm{D}(4\varepsilon_1+\varepsilon);$$

car $\sum m = \sum \varpi(n)$ (n° 10). Or en divisant par μ, comme précédemment, et passant à la limite, on en déduit la formule

$$h = \frac{2\sqrt{\mathfrak{D}}}{l(\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{\mathfrak{D}})} \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i},$$

qui, combinée avec l'équation (11), donne, pour exprimer le nombre des classes proprement primitives du déterminant $\mathfrak{D}\mathrm{S}^2$, l'équation

$$(15) \qquad h = \frac{2\mathrm{S}\sqrt{\mathfrak{D}}}{l(\mathrm{T}'+\mathrm{U}'\mathrm{S}\sqrt{\mathfrak{D}})} \Pi \left[1 - \left(\frac{\mathfrak{D}}{q}\right)\frac{1}{q}\right] \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i}.$$

Dans cette formule, comme dans la précédente, q désigne indéfiniment tous les facteurs premiers inégaux de S, pour lesquels $\mathfrak{D}$ n'est pas divisible.

La convergence de la série $\sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i}$ est démontrée par la manière même dont nous l'obtenons; mais, comme les modules de cette série forment une série divergente, la limite vers laquelle tend $\sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i}$ dépend de la loi suivant laquelle on s'avance parmi les termes positifs et les termes négatifs. Dans les formules précédentes, cette série doit être réduite à sa limite principale, celle vers laquelle elle tend quand on prend les valeurs de i dans l'ordre croissant de grandeur; car, dans la formule

$$\sum_1^{\mu} \varpi(n) = \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \mathrm{E}\left(\frac{\mu+i}{2i}\right),$$

on ne peut prendre aucune valeur de i supérieure à la limite de μ, et l'on ne prend aucune valeur de i sans prendre toutes celles qui lui sont inférieures.

25. Comme le nombre des classes proprement primitives h peut se déterminer directement, les formules précédentes donnent les limites principales des séries que l'on déduit de la série harmonique en affectant du signe -1 une partie de ses termes, suivant certaines lois déterminées. Nous en donnerons ici quelques exemples. Prenons d'abord la

formule (14) en y joignant $S=1$, ce qui réduit à l'unité le produit $\Pi\left[1-\left(\frac{\mathfrak{D}}{q}\right)\frac{1}{q}\right]$, nous aurons

$$\sum\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right)\frac{1}{i}=\frac{\pi h}{2\sqrt{-\mathfrak{D}}} \quad \text{et} \quad \sum\left(\frac{-1}{i}\right)\frac{1}{i}=\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}\frac{1}{i}=\frac{\pi}{4}.$$

La seconde formule nous donne la série de Leibnitz

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots,$$

soit $\mathfrak{D}=-2$. Or $\left(\frac{-2}{i}\right)=(-1)^{\frac{i^2-1}{8}+\frac{i-1}{2}}=1$ ou -1, suivant que i est de l'une des formes $8n+1$, 3, ou de l'une des formes $8n+5$, 7. On a donc, comme $h=1$,

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots.$$

Pour $\mathfrak{D}=-3$, on trouve

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{23}+\ldots$$

Dans les deux premières séries, les termes $\frac{1}{8n+1}$ et $\frac{1}{8n+7}$ ont les mêmes signes, tandis que les autres termes ont des signes contraires. On aura donc, en les ajoutant,

$$\frac{(1+\sqrt{2})\pi}{8}=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{31}+\frac{1}{38}-\ldots.$$

De même, en faisant $S=1$ dans l'équation (15), on en déduit

$$\sum\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right)\frac{1}{i}=\frac{hl(T+U\sqrt{\mathfrak{D}})}{2\sqrt{\mathfrak{D}}}.$$

Soit $\mathfrak{D}=2$, on a

$$\left(\frac{2}{i}\right)=(-1)^{\frac{i^2-1}{8}},$$

$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\ldots=\frac{l(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}};$$

soit $\mathfrak{D} = 3$,

$$1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \ldots = \frac{l(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$

Ces exemples suffisent pour indiquer les applications que l'on peut faire des formules précédentes dans la théorie des suites.

VI.

26. Quand le déterminant $\mathfrak{D}$ est négatif, la transformation de la série $\sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i}$, que nous désignerons par V, met en évidence une relation remarquable entre le nombre des classes proprement primitives du déterminant $-n$ et l'exposant μ, qui permet de résoudre, au moyen de certaines fonctions θ, l'équation

$$4p^{\mu} = x^2 + ny^2,$$

dans laquelle p désigne un nombre premier de la forme $n\omega + 1$. Nous trouverons, pour exprimer le nombre des classes h, les mêmes fonctions numériques au moyen desquelles Cauchy a exprimé la valeur de l'exposant μ (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XVII). Nous commencerons par rappeler que la suite

$$(1) \qquad \sin\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} + \frac{\sin 7\varphi}{7} + \ldots$$

est égale à $\frac{\pi}{4}$ lorsque φ est compris entre $2m\pi$ et $(2m+1)\pi$, et à $-\frac{\pi}{4}$ quand φ est compris entre $(2m+1)\pi$ et $(2m+2)\pi$, m désignant un entier quelconque.

Si dans la série (1) nous remplaçons φ par $\frac{\pi}{2} + \varphi'$, elle devient

$$(2) \qquad \cos\varphi' - \frac{\cos 3\varphi'}{3} + \frac{\cos 5\varphi'}{5} - \frac{\cos 7\varphi'}{7} + \ldots.$$

Cette seconde série est donc égale à $\frac{\pi}{4}$ ou à $-\frac{\pi}{4}$, suivant que l'arc $\frac{\pi}{2}+\varphi'$ est compris entre $2m\pi$ et $(2m+1)\pi$, ou entre $(2m+1)\pi$ et $(2m+2)\pi$.

27. Posons dans la série (1) $\varphi=\frac{\pi}{4}\pm\varphi'$ et transformons le résultat au moyen de la formule

$$\begin{aligned}\sin p\left(\frac{\pi}{4}\pm\varphi'\right)&=\sin p\frac{\pi}{4}\cos\varphi'\pm\cos p\frac{\pi}{4}\sin\varphi'\\&=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}+\frac{p-1}{2}}\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{2}}\pm(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\frac{\sin\varphi'}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Nous obtiendrons les deux formules suivantes :

$$\sum(-1)^{\frac{p^2-1}{8}+\frac{p-1}{2}}\frac{\cos p\varphi'}{p}+\sum(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\frac{\sin p\varphi'}{p}=(-1)^f\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\sum(-1)^{\frac{p^2-1}{8}+\frac{p-1}{2}}\frac{\cos p\varphi'}{p}-\sum(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\frac{\sin p\varphi'}{p}=(-1)^g\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

dans lesquelles f et g sont deux nombres entiers qui vérifient respectivement les deux équations

$$\frac{\pi}{4}+\varphi'=f\pi+\varphi'',\quad \frac{\pi}{4}-\varphi'=g\pi+\varphi''',$$

où φ'' et φ''' désignent deux arcs compris entre o et π. En combinant ces formules par addition et par soustraction, on obtient

$$(3)\qquad \sum(-1)^{\frac{p^2-1}{8}+\frac{p-1}{2}}\frac{\cos p\varphi'}{p}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}[(-1)^f+(-1)^g],$$

$$(4)\qquad \sum(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\frac{\sin p\varphi'}{p}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}[(-1)^f-(-1)^g].$$

Dans ces formules les sommations indiquées s'étendent à toutes les valeurs impaires de p.

donc nous désignons par μ, μ', μ'' les nombres entiers compris respectivement dans ces trois intervalles, nous aurons

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{n}}\left[\sum\left(\frac{\mu}{n}\right) - \sum\left(\frac{\mu'}{n}\right) + \sum\left(\frac{\mu''}{n}\right)\right], \quad n = 4x + 1.$$

Or les valeurs de μ et μ'' se correspondent une à une par la formule $\mu'' = n - \mu$; d'ailleurs on a

$$\left(\frac{n-\mu}{n}\right) = \frac{\mu}{n},$$

donc

$$\sum\left(\frac{\mu''}{n}\right) = \sum\left(\frac{\mu}{n}\right).$$

D'un autre côté, la formule

$$\sum\left(\frac{\mu}{n}\right) + \sum\left(\frac{\mu'}{n}\right) + \left(\frac{\mu''}{n}\right) = 0$$

donne

$$-\sum\left(\frac{\mu''}{n}\right) = \sum\left(\frac{\mu}{n}\right) + \sum\left(\frac{\mu'}{n}\right) = 2\sum\left(\frac{\mu}{n}\right).$$

On a donc

$$(7) \qquad V = \frac{\pi}{\sqrt{n}}\sum\left(\frac{\mu}{n}\right), \quad n = 4x+1, \quad 0 < \mu < \tfrac{1}{4}n.$$

29. Soit $\mathfrak{D} = -2n$: on aura

$$\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) = \left(\frac{-2}{i}\right)\left(\frac{n}{i}\right) = (-1)^{\frac{i^2-1}{2}+\frac{i-1}{8}}\left(\frac{i}{n}\right)(-1)^{\frac{n-1}{2}\,\frac{i-1}{2}}.$$

1° Si $n = 4x + 1$,

$$\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) = (-1)^{\frac{i^2-1}{8}+\frac{i-1}{2}}\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\left(\frac{l}{n}\right)\cos\left(i\frac{2l\pi}{n}\right).$$

2° Si $n = 4x + 3$,

$$\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) = (-1)^{\frac{i^2-1}{8}} \left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{l}{n}\right) \sin\left(i \frac{2l\pi}{n}\right).$$

En substituant ces valeurs dans la série V, et intervertissant l'ordre des intégrations, on obtient

$$V = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{l}{n}\right) \sum \frac{(-1)^{\frac{i^2-1}{8} + \frac{i-1}{2}} \cos\left(i \frac{2l\pi}{n}\right)}{i}, \quad \text{si } n = 4x + 1,$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{l}{n}\right) \sum \frac{(-1)^{\frac{i^2-1}{8}} \sin\left(i \frac{2l\pi}{n}\right)}{i}, \quad \text{si } n = 4x + 3.$$

La transformation de ces formules, au moyen des équations (3) et (4), donnera

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{2n}} \sum \left(\frac{l}{n}\right) [(-1)^f + (-1)^g],$$

ou

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{2n}} \sum \left(\frac{l}{n}\right) [(-1)^f + (-1)^g],$$

suivant que le nombre n sera de la forme $4x + 1$ ou de la forme $4x + 3$.

Dans ces formules, les intégrations s'étendent à toutes les valeurs de l premières avec n et inférieures à n; les nombres entiers sont déterminés respectivement par les deux équations

$$\frac{2l}{n} + \frac{1}{4} = f + \varepsilon, \quad -\frac{2l}{n} + \frac{1}{4} = g + \varepsilon',$$

dans lesquelles ε et ε' doivent être compris entre 0 et 1. Or, quand le nombre l varie de 0 à $\frac{n}{8}$,

$$f = 0, \quad g = 0;$$

quand le nombre l varie de $\frac{n}{8}$ à $\frac{3n}{8}$,

$$f=0, \quad g=-1;$$

quand le nombre l varie de $\frac{3n}{8}$ à $\frac{5n}{8}$,

$$f=1, \quad g=-1;$$

quand le nombre l varie de $\frac{5n}{8}$ à $\frac{7n}{8}$,

$$f=1, \quad g=-2;$$

quand le nombre l varie de $\frac{7n}{8}$ à n,

$$f=2, \quad g=-2.$$

Si nous désignons indéfiniment par l, l', l'', l''', l^{iv} les nombres entiers compris respectivement dans ces cinq intervalles, nous trouvons

$$\mathrm{V}=\frac{\pi}{2\sqrt{2n}}\left[\sum\left(\frac{l}{n}\right)-\sum\left(\frac{l''}{n}\right)+\sum\left(\frac{l^{\text{iv}}}{n}\right)\right], \quad \text{si } n=4x+1,$$

$$\mathrm{V}=\frac{\pi}{2\sqrt{2n}}\left[\sum\left(\frac{l'}{n}\right)-\sum\left(\frac{l'''}{n}\right)\right], \quad \text{si } n=4x+3.$$

Les nombres l^{iv} et l se correspondent deux à deux par la formule $l^{\text{iv}}=n-l$: donc

$$\sum\left(\frac{l^{\text{iv}}}{n}\right)=\sum\left(\frac{l}{n}\right).$$

De même, les nombres l'' peuvent se partager en deux groupes, les uns compris entre $\frac{3n}{8}$ et $\frac{n}{2}$, que nous désignerons par l_1, et les autres compris entre $\frac{n}{2}$ et $\frac{5n}{8}$, qui seront donnés par la formule $n-l_1$. On a donc

$$\sum\left(\frac{l''}{n}\right)=2\sum\left(\frac{l_1}{n}\right),$$

et la première des deux formules obtenues devient

$$(8)\quad V=\frac{\pi}{\sqrt{2n}}\left[\sum\left(\frac{l}{n}\right)-\sum\left(\frac{l_1}{n}\right),\quad n=4x+1,\quad 0<l<\frac{n}{8},\quad \frac{3n}{8}<l_1<\frac{n}{2}.\right.$$

Les nombres l' et l'' se correspondent deux à deux par la formule $l''=n-l'$; d'ailleurs, le nombre n étant de la forme $4x+3$, on a

$$\left(\frac{n-l'}{n}\right)=-\left(\frac{l'}{n}\right),\quad \text{d'où}\quad \sum\left(\frac{l''}{n}\right)=-\sum\left(\frac{l'}{n}\right);$$

donc

$$(9)\qquad V=\frac{\pi}{\sqrt{2n}}\sum\left(\frac{l'}{n}\right),\quad n=4x+3,\quad \frac{n}{8}<l'<\frac{3n}{8}.$$

30. En substituant, dans la formule

$$h=\frac{2\sqrt{-D}}{\pi}\sum\left(\frac{D}{i}\right)\frac{1}{i}=\frac{2\sqrt{-D}}{\pi}V,$$

les valeurs de V que nous venons de trouver, nous obtiendrons, pour exprimer le nombre des classes proprement primitives pour un déterminant négatif D, les quatre formules suivantes :

I. $$D=-n,\quad n=4x+3,$$
$$h=\sum\left(\frac{m'}{n}\right)=i-j,\quad 0<m'<\tfrac{1}{2}n;$$

i désigne le nombre des termes de la suite $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$, qui vérifient la condition $\left(\frac{m'}{n}\right)=1$, et j le nombre de ceux qui vérifient la condition $\left(\frac{m'}{n}\right)=-1$.

II. $$D=-n,\quad n=4x+1,$$
$$h=2\sum\left(\frac{\mu}{n}\right)=2(\alpha-\beta),\quad 0<\mu<\frac{n}{4}.$$

α désigne le nombre des termes de la suite $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{4}$, qui vérifient la condition $\left(\frac{\mu}{n}\right)=1$, et β le nombre de ceux qui vérifient la relation $\left(\frac{\mu}{n}\right)=-1$.

Quand le nombre n est premier, α est le nombre des résidus, et β celui des non-résidus compris entre o et $\frac{1}{4}n$.

III. $$\mathfrak{D}=-2n, \quad n=4x+1>1,$$

$$h=2\left[\sum\left(\frac{l}{n}\right)-\sum\left(\frac{l_1}{n}\right), \quad 0<l<\frac{n}{8}, \quad \frac{3n}{8}<l_1<\frac{n}{2}.\right.$$

Si l'on désigne par A et A′ les nombres des valeurs l et l_1 qui satisfont à la relation $\left(\frac{l}{n}\right)=1$, par B et B′ les nombres de celles qui vérifient la relation opposée $\left(\frac{l}{n}\right)=-1$, la formule précédente peut se mettre sous la forme suivante :

$$h=2(A-B-A'+B'),$$

IV. $$\mathfrak{D}=-2n, \quad n=4x+3,$$

$$h=2\sum\left(\frac{l'}{n}\right), \quad \frac{n}{8}<l'<\frac{3n}{8}.$$

Lorsqu'on désigne par A le nombre des valeurs de l' qui vérifient la condition $\left(\frac{l'}{n}\right)=1$, et par B le nombre de celles qui satisfont à la relation opposée, la formule obtenue prend la forme suivante :

$$h=2(A-B).$$

31. Cauchy, dans la note XII du Mémoire cité, donne diverses transformations de la fonction numérique $i-j$, qui fournissent autant d'expressions diverses du nombre h. On a (p. 696)

$$i-j=\left[2-\left(\frac{2}{n}\right)\frac{-\Delta_1}{n}\right]=\left[2-\left(\frac{2}{n}\right)\right]\frac{-\Delta_2}{n^2},\ldots,$$

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ désignant respectivement les sommes $\sum \left(\frac{l}{n}\right) l$, $\sum \left(\frac{l}{n}\right) l^2, \ldots$ étendues à toutes les valeurs de l premières avec n et inférieures à n. En désignant ces valeurs par a ou par b, suivant qu'elles vérifient la relation $\left(\frac{l}{n}\right) = 1$, ou la relation opposée $\left(\frac{l}{n}\right) = -1$, on aura

$$h = i - j = \left[2 - \left(\frac{2}{n}\right)\right] \frac{\Sigma b - \Sigma a}{n} = \left[2 - \left(\frac{2}{n}\right)\right] \frac{\Sigma b^2 - \Sigma a^2}{n^2} = \ldots.$$

La première de ces transformations se trouve aussi parmi les formules de Dirichlet, qui donnent en outre une transformation analogue pour chacun des trois autres cas.

Quand n désigne un nombre premier $4x + 3$, la formule

$$h = \left[2 - \left(\frac{2}{n}\right)\right] \frac{\Sigma b - \Sigma a}{n}$$

est équivalente à celle que Jacobi a publiée dans le *Journal de Crelle*, (1832) et qu'il avait trouvée par induction.

Dans le même cas, où n est un nombre premier $4x + 3$, Cauchy donne une règle fort curieuse pour déterminer la différence $i - j$, et par suite le nombre des classes h : « Soit B_i le nombre de Bernoulli qui correspond à l'indice i, et n un nombre premier $4x + 3$; la différence $i - j$, définie plus haut (I), est déterminée par la congruence

$$i - j \equiv 2 B_{\frac{n+1}{4}}, \quad \text{si } n = 8l + 7,$$

et par la congruence

$$i - j \equiv -6 B_{\frac{n+1}{4}}, \quad \text{si } n = 8l + 3. \text{ »}$$

Enfin, dans le même cas, on peut déterminer le nombre h au moyen d'un nombre limité d'opérations effectuées sur le déterminant, en introduisant la seule fonction numérique $E(x)$, que nous désignerons, pour abréger, par $(x) =$ le plus grand entier contenu dans x. On a

$$h = \left[2 - \left(\frac{2}{n}\right)\right] \left[\frac{(2l+1)(4l+1)}{3} - 2 \sum_1^l i(\sqrt{in})\right], \quad l = \frac{n-3}{4}.$$

VII.

32. Quand le déterminant $\mathfrak{D}$ est positif, la transformation de la série $\sum\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right)\frac{1}{i}$ peut s'effectuer au moyen de la formule

$$(10) \qquad \tfrac{1}{2} l \cot\frac{\varphi}{2} = \cos\varphi + \frac{\cos 3\varphi}{3} + \frac{\cos 5\varphi}{5} + \ldots, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

que nous avons démontrée au n° **26**. Nous nous bornerons à un seul cas, celui où

$$\mathfrak{D} = n = 4x + 1.$$

La formule (5) devient alors

$$\sum\left(\frac{m}{n}\right)\cos\left(m\frac{2i\pi}{n}\right) = \left(\frac{i}{n}\right)\sqrt{n};$$

d'ailleurs

$$\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) = \left(\frac{n}{i}\right) = \left(\frac{i}{n}\right);$$

donc

$$\sum\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right)\frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\frac{1}{i}\sum\left(\frac{m}{n}\right)\cos\left(m\frac{2i\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\left(\frac{m}{n}\right)\sum\frac{\cos\left(i\frac{2m\pi}{n}\right)}{i}.$$

Or, d'après la formule (10), on a

$$\sum\cos\left(i\frac{2m\pi}{n}\right) = \tfrac{1}{2} l \cot\frac{m\pi}{n},$$

si m est compris entre 0 et $\frac{n}{2}$. En y posant $\varphi = 2\pi - \varphi'$, on trouve

$$\sum\frac{\cos(i\varphi')}{i} = \tfrac{1}{2} l \cot\left(\pi - \frac{\varphi'}{2}\right); \quad \pi < \varphi' < 2\pi.$$

On a donc

$$\sum\frac{\cos\left(i\frac{2m\pi}{n}\right)}{i} = \tfrac{1}{2} l \cot\left(\frac{n-m}{n}\pi\right), \quad \frac{n}{2} < m < n,$$

et par conséquent

$$\sum \left(\frac{\mathbb{D}}{i}\right)\frac{1}{i} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\left[\sum \left(\frac{m}{n}\right) l\cot\frac{m\pi}{n} + \sum \left(\frac{m'}{n}\right) l\cot\left(\frac{n-m'}{n}\pi\right)\right],$$

$$0 < m < \frac{n}{2} < m' < n.$$

D'ailleurs

$$\left(\frac{m'}{n}\right) = \left(\frac{n-m'}{n}\right);$$

la seconde somme peut donc s'écrire

$$\sum \left(\frac{n-m'}{n}\right) l\cot\left(\frac{n-m'}{n}\pi\right) = \sum \left(\frac{m}{n}\right) l\cot\frac{m\pi}{n},$$

car chacune des valeurs de $n - m'$ est égale à l'une des valeurs de m. En substituant dans la formule

$$h = \frac{2\sqrt{\mathbb{D}}}{l(\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{\mathbb{D}})}\sum \left(\frac{\mathbb{D}}{i}\right)\frac{1}{i},$$

on obtient l'équation

$$h = \frac{2}{l(\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{n})}\, l\,\frac{\Pi\cot\frac{a\pi}{n}}{\Pi\cot\frac{b\pi}{n}}, \tag{11}$$

dans laquelle nous désignons les nombres entiers premiers à n et compris entre o et $\frac{1}{2}n$ par a ou par b, suivant qu'ils vérifient la relation $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ ou la relation opposée $\left(\frac{b}{n}\right) = -1$.

Dirichlet, effectuant sa transformation par une autre méthode, trouve, dans le même cas,

$$h = \frac{2-\left(\frac{2}{n}\right)}{l(\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{n})}\, l\,\frac{\Pi\sin b\frac{\pi}{n}}{\Pi\sin a\frac{\pi}{n}}.$$

Dans cette formule a et b ont la signification que nous venons d'indiquer; seulement les produits indiqués par Π s'étendent à toutes les valeurs de a et de b comprises entre o et n.

33. Pour obtenir les formules analogues à la formule (11) dans les autres cas, il faut transformer la formule (10) en y remplaçant φ par $\frac{\pi}{2}+\varphi'$, ou par $\frac{\pi}{4}\pm\varphi'$, comme nous avons fait aux n^{os} **26** et **27** pour la série (1). Ces formules, combinées avec l'équation (5), conduiront aux formules cherchées par une méthode toute semblable à celle que nous venons de suivre dans le cas où $n=4x+1$. Nous n'insisterons pas davantage sur ces transformations, qui offrent moins d'intérêt que celles qui concernent les déterminants négatifs.

SUR LA

PHOSPHORESCENCE DU PHOSPHORE,

PAR M. J. JOUBERT,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE MONTPELLIER.

I. — *Historique.*

Le phosphore luit dans l'air à la température ordinaire et, s'il est dans une cloche placée sur l'eau ou le mercure, la phosphorescence est accompagnée d'une diminution de volume très-sensible. Le premier fait est celui par lequel s'est tout d'abord révélé le phosphore; quant au second, je le trouve signalé pour la première fois par Fontana [1]; Scheèle [2] en fait mention dans son *Traité de l'air et du feu*. Je n'en trouve pas trace dans les écrits de Lavoisier. On ne peut douter cependant que ce fait ne fût connu des chimistes de l'École française et attribué par eux à sa véritable cause, l'oxydation du phosphore; témoin la remarque suivante de Fourcroy [3] : « Il faut avouer qu'il doit paraître étonnant que l'air vital, ce corps si éminemment propre à la combustion, qui brûle avec tant de rapidité tous les corps combustibles échauffés chacun à un degré déterminé, n'ait aucune action, à la température ordinaire, sur le phosphore et que cette substance perde, même au milieu de cet air, une grande partie de la propriété lumineuse si bien entretenue par l'air atmosphérique. »

La remarque, en effet si curieuse, de Fourcroy, devait, quelques années plus tard, servir de base à une vive attaque contre la théorie dite

(1) FONTANA cité par Kirwan, *Supplément au Traité de l'air et du feu*, de Scheèle; 1787.
(2) SCHEÈLE, *Traité de l'air et du feu*, p. 63; 1777.
(3) FOURCROY, *Mémoires de l'Académie des Sciences pour* 1788.

alors *des chimistes français*, et qui n'était que celle de Lavoisier. Au moment où cette théorie arrivait à son triomphe définitif et comptait parmi ses plus zélés défenseurs ses plus illustres adversaires de la veille (Cavendish, Kirwan, Klaproth, etc.), un chimiste de Jena, Göttling ([1]), partant du fait remarqué par Fourcroy et de cet autre, que le phosphore luit dans l'azote réputé pur, venait affirmer que l'azote est plus propre à la combustion que l'oxygène; et deux autres chimistes allemands, Lempe et Lampadius ([2]), enchérissant encore, démontraient que le phosphore brûlant dans l'air atmosphérique laisse pour résidu l'air vital, et absorbe par conséquent le gaz azote.

Il en fut de cette attaque comme de toutes celles qui avaient été lancées contre la théorie de Lavoisier : elle ne servit qu'à provoquer des études nouvelles et, par les résultats auxquels elle conduisit avec tant de sûreté, qu'à lui donner plus de solidité et d'éclat. Deux Mémoires réfutèrent les assertions des chimistes allemands, l'un de Berthollet ([3]), l'autre de Fourcroy et de Vauquelin ([4]).

Berthollet montre que c'est bien l'oxygène que le phosphore enlève à l'air atmosphérique et qu'il ne laisse comme résidu que l'azote; que les phénomènes de l'oxydation et de la phosphorescence sont corrélatifs; que la phosphorescence cesse sitôt que l'oxygène est complétement absorbé, qu'elle reparait sitôt qu'on ajoute de l'oxygène; et il signale l'emploi du phosphore à froid comme un procédé eudiométrique supérieur à tous ceux qu'on avait employés jusque-là, et ayant surtout l'avantage de présenter, « par la cessation des lueurs, un indice certain de la fin de l'absorption ». La remarque de Fourcroy, dont il vérifie l'exactitude, lui suggère l'hypothèse suivante : Le phosphore se dissout dans l'azote, non dans l'oxygène, et n'est enflammé par le second qu'après avoir été dissous par le premier. Il voit là une nouvelle propriété de l'azote; mais Fourcroy et Vauquelin trouvaient la même propriété

([1]) Göttling, *Observations tendant à rectifier le nouveau système ;* Weimar, 1794.

([2]) Lempe et Lampadius, cités par Berthollet, et par Fourcroy et Vauquelin, *loc. cit.*

([3]) Berthollet, *Observations sur les propriétés eudiométriques du phosphore* (*Journal de l'École Polytechnique*, 3e cahier, p. 274; 1797).

([4]) Fourcroy et Vauquelin, *Examen des expériences faites en Allemagne sur la prétendue combustion dans le gaz azote, etc., et des résultats qu'on en a tirés.* (Lu à la 1re classe de l'Institut, 11 pluviôse an IV). — *Annales de Chimie*, t. XXI, p. 189; 1797.

à l'hydrogène, et Brugnatelli (1) montrait que l'oxygène dans lequel on avait laissé séjourner du phosphore donnait des lueurs quand on le faisait passer bulle à bulle dans de l'azote et, par conséquent, qu'il dissolvait aussi le phosphore.

Le Mémoire de Fourcroy et Vauquelin est encore plus explicite et plus complet. A quelques détails près, les conditions exactes du phénomène de la phosphorescence s'y trouvent déterminées. Je cite presque textuellement les conclusions.

Le phosphore luit et s'oxyde dans l'oxygène pur au-dessus de 27°,5 C.; au-dessous il se vaporise, mais sans luire et sans donner de produits acides. La phosphorescence n'est point due à la vaporisation du phosphore, elle est la conséquence de sa combustion et en est inséparable; dans l'azote, dans l'hydrogène purs, il n'y a pas de phosphorescence, bien qu'il y ait vaporisation. « Lorsque le phosphore luit dans le gaz azote où on le plonge, c'est qu'alors ce gaz est mêlé d'une petite portion de gaz oxygène, comme on le prouve sans réplique, en ajoutant seulement au gaz azote, qui bien pur dissout le phosphore sans lumière, une petite quantité d'air vital qui le rend susceptible de faire luire le phosphore qu'on y introduit (2) ».

Ces deux Mémoires fixèrent l'opinion, et tous ceux qui paraissent à la suite viennent seulement faire connaître quelques particularités nouvelles de ce singulier phénomène de la phosphorescence : Bellani (3) montre que le phosphore luit et s'oxyde à la température ordinaire dans l'oxygène pur raréfié; on fait connaître des substances qui mettent plus ou moins obstacle au phénomène; Berthollet (4) avait déjà remarqué l'hydrogène sulfuré, Göttling (5) l'hydrogène phosphoré et l'ammoniaque; Thenard (6) montre la même propriété dans le gaz olé-

(1) BRUGNATELLI, *Annali di Chimica e Historie naturale*, t. XIII, p. 295; 1797. — *Annales de Chimie*, t. XXIV, p. 37.

(2) FOURCROY et VAUQUELIN, *loc. cit.*, p. 209.

(3) BELLANI, *Bulletin de Pharmacie*, p. 489, 5e année, 1813.

(4) BERTHOLLET, *Observations sur les propriétés eudiométriques du phosphore* (*Journal de l'École Polytechnique*, 3e cahier).

(5) GÖTTLING, cité par Van Mons, *Lettre à Brugnatelli* (*Annales de Chimie*, t. XXII, p. 219).

(6) THENARD, *Traité de Chimie*, article PHOSPHORE.

fiant; Davy ([1]) et Graham ([2]) donnent une longue liste de corps simples et composés, organiques et inorganiques, qui empêchent plus ou moins la phosphorescence; mais dans tous ces Mémoires aucun doute n'apparaît sur le caractère essentiel du phénomène, et il en est ainsi jusqu'au moment où Berzélius fait paraître la 5e édition de sa *Chimie* (1843) ([3]).

Berzélius y attribue la phosphorescence non à l'oxydation, mais à la vaporisation du phosphore. Ses raisons, c'est que le phosphore luit dans le vide barométrique, qu'il luit dans l'azote et l'hydrogène exempts d'oxygène, et enfin que l'oxydation du phosphore est accompagnée d'un dégagement de chaleur qui ne se manifeste pas dans les conditions ordinaires de la phosphorescence. Ainsi, pour lui, la cause unique de la phosphorescence est la vaporisation du phosphore : l'oxydation n'est qu'un phénomène secondaire; le phosphore luit tant qu'il se vaporise, c'est-à-dire tant que l'espace qui le renferme n'est pas saturé; s'il y a de l'oxygène, cette saturation n'est atteinte que lorsque l'oxygène a disparu, la vapeur de phosphore étant absorbée au fur et à mesure de sa production. Quand dans un espace le phosphore a cessé de luire, on peut de nouveau le rendre lumineux, soit en échauffant, soit en augmentant l'espace occupé par la vapeur, soit en provoquant de toute autre manière une vaporisation nouvelle. Cette théorie permet d'expliquer tous les phénomènes qu'on observe ordinairement dans un espace contenant un bâton de phosphore; mais je ne vois pas comment elle pourrait expliquer les nuages lumineux que produit l'introduction de quelques bulles d'oxygène dans un gaz qui a séjourné au contact du phosphore et qui se trouve simplement saturé de sa vapeur.

Quoi qu'il en soit, l'assertion de Berzélius fut le sujet d'un débat contradictoire en Allemagne, auquel prirent part Marchand ([4]) d'un côté, Fischer ([5]) et Schrötter ([6]) de l'autre.

([1]) Davy, *Philosophical Transactions*, p. 1812 et 1818.

([2]) Graham, *Observations sur l'oxydation du phosphore* (*Quart. Journal*, n° 11; 1829. — *Ann. Pogg.*, t. XVIII, p. 375).

([3]) Berzélius, *Lehrbuch der Chemie*, Bd. I, p. 195; 1843.

([4]) Marchand, *Erdmann's Journal für praktische Chemie*, Bd. L, s. 1, 1850.

([5]) Fischer, *Erdmann's Journal für praktische Chemie*, Bd. XXXV, s. 343; 1845. — Bd. XXXIX, s. 48.

([6]) Schrötter, *Ueber das Leuchten des Phosphor* (*Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften*, Bd. IX, s. 414-419, Jahrgang 1852).

Je n'ai pas lu les Mémoires originaux de Fischer et de Marchand ; je ne les connais que par la courte analyse qu'en donne M. Schrötter. Fischer cherche à démontrer que les faits sur lesquels s'appuie Berzélius sont faux et que le phosphore ne luit ni dans le vide barométrique ni dans les gaz parfaitement purs.

Mais, dans toutes les questions relatives à la phosphorescence, ce n'est pas tout de montrer que le phosphore ne luit pas dans telle ou telle circonstance; comme un grand nombre de corps mettent obstacle à la phosphorescence, il faut démontrer qu'aucun de ces corps n'est intervenu, ou tout au moins que sa présence n'empêche pas la phosphorescence du moment où l'on introduit des traces d'oxygène. C'est précisément cette circonstance qui jette du doute sur quelques-unes des expériences de Fourcroy et de Vauquelin. A cette époque, on préparait l'azote par l'action de l'acide nitrique sur la chair musculaire; or les vapeurs nitreuses empêchent radicalement la phosphorescence. Le gaz employé en était-il bien exempt? C'est, autant que j'ai pu comprendre [1], par ce genre de raisons que Marchand réfute les expériences de Fischer. Il affirme, en outre, que dans un courant de gaz parfaitement pur le phosphore luit d'une manière continue.

En présence de ces résultats contradictoires, M. Schrötter [2] cherche à vider la question par des expériences précises.

Du phosphore placé sous la cloche de la machine pneumatique cesse de luire quelque temps après qu'on a fait le vide; si l'on fait alors jouer les pistons, la cloche reste obscure, mais les deux cylindres de la pompe deviennent lumineux; il y a donc vaporisation très-active du phosphore, mais il n'y a de phosphorescence que là où il y a de l'oxygène.

Il montre que le phosphore ne luit ni dans le vide barométrique ni dans l'hydrogène pur, même quand on échauffe à 100 degrés l'espace qui le contient.

Enfin il place du phosphore dans un courant d'hydrogène purifié avec soin par les procédés ordinaires et passant finalement sur une

---

(1) ... Dass bei den Versuchen Fischer's fremdartige Eimflüsse die Ursache des Nichtleuchtens des Phosphors in sauerstoffreien Gasen wären.

(2) SCHRÖTTER, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Vienne*, t. IX; 1852.

colonne de cuivre métallique. Le cuivre ne fut pas chauffé tout d'abord, et après six heures de dégagement le phosphore continuait à luire. Sitôt que le cuivre fut chauffé, la phosphorescence disparut; elle reparaissait quand on laissait refroidir le cuivre, et les mêmes alternatives furent répétées un grand nombre de fois.

Comment se fait-il qu'en présence d'expériences si nettes et si concluantes l'opinion de Berzélius se soit si fortement accréditée en France, que jusqu'à ces dernières années elle soit restée l'opinion régnante et la seule admise dans l'enseignement? De tous les livres de Chimie, élémentaires ou non, publiés en France depuis 1843, et que j'ai eus sous la main, il n'en est pas un seul qui n'adopte pleinement l'opinion de Berzélius et ne réfute avec lui la théorie de l'oxydation. Je ne connais que deux exceptions et toutes récentes : la 3e édition de la *Chimie* de M. Debray, publiée en 1870, et le *Dictionnaire de Chimie* de M. Wurtz, qui vient de paraître.

Mes expériences sur ce point étaient terminées en 1870. Depuis il a paru, en Allemagne, un Mémoire de M. Müller qui arrive aux mêmes conclusions [1]. Je citerai, au fur et à mesure que l'occasion s'en présentera, les expériences et les résultats consignés dans ce Mémoire.

II. — *La phosphorescence est due uniquement à l'oxydation du phosphore.*

Mes expériences, comme celles de M. Schrötter, ont porté sur les trois points suivants :

1° Le phosphore ne luit point dans le vide barométrique; il peut y être fondu et volatilisé sans que la phosphorescence apparaisse.

2° Le phosphore ne luit pas dans une atmosphère gazeuse complétement dépouillée d'oxygène, à quelque pression que ce soit. Il peut y être fondu et volatilisé, sans qu'il y ait trace de phosphorescence.

3° Le phosphore ne luit pas dans un courant continu d'azote, d'hydrogène, d'acide carbonique, quand toutes les précautions sont prises

---

[1] W. MÜLLER, *Sur la phosphorescence du phosphore* (*Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, 1870; *Ann. Pogg.*, t. CXLI, p. 95).

pour éliminer l'oxygène. Il peut être fondu et volatilisé dans le courant gazeux sans qu'il y ait trace de phosphorescence.

1. On ne réussit pas toujours à faire passer un bâton de phosphore dans le vide barométrique sans qu'il y ait phosphorescence; cependant, en prenant d'une part un tube barométrique bien bouilli et d'autre part un bâton de phosphore préparé à l'instant et démoulé dans le mercure même de la cuvette et sans qu'il ait eu un seul instant le contact de l'air, on réussit à ne pas avoir la moindre lueur. Dans le cas contraire, la phosphorescence cesse rapidement et avec un tube bien bouilli, placé sur une cuve profonde, on peut augmenter ou diminuer la chambre barométrique sans la faire reparaître. Il n'en est pas de même avec un tube soigneusement rempli de mercure, mais non bouilli : la phosphorescence se produit quand on soulève le tube. J'ai détaché à la lampe la chambre soufflée en boule d'un baromètre, dans laquelle j'avais fait passer un morceau de phosphore. Le phosphore a été chauffé dans cette espèce d'ampoule au contact de l'eau ou du sable chauds : il s'est fondu, volatilisé et condensé sur les parties froides en beaux cristaux transparents, le tout sans la moindre trace de phosphorescence.

2. J'ai renfermé des bâtons de phosphore dans des tubes scellés à la lampe et contenant de l'azote, de l'hydrogène et de l'acide carbonique purs. Le gaz, parfaitement pur et préparé comme je le dirai plus loin, traversait le tube effilé à ses deux extrémités et, après s'être assuré qu'il n'y avait pas de phosphorescence, on réussissait à le fermer malgré le léger excès de pression intérieure. Il était ensuite impossible, quoi qu'on fît, de faire apparaître la phosphorescence. Le phosphore était fondu et déplacé par volatilisation d'un point à un autre, chauffé fortement de manière à être transformé partiellement en phosphore rouge, sans qu'on vît apparaître la moindre lueur. Dans d'autres expériences, le tube étant fermé à un bout, on y faisait passer le gaz contenu dans un gazomètre Bunsen par l'intermédiaire d'une pompe d'Alvergniat; dans ce cas on a toujours, en commençant, de la phosphorescence; mais elle disparaît bientôt. On étirait alors le tube, la pression ayant été amenée à un point quelconque, et l'on soumettait le tube aux mêmes épreuves, suivies des mêmes résultats.

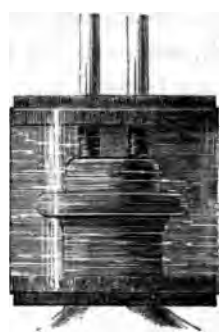
Enfin on laissait quelquefois le tube en communication avec la ma-

chine, et il était facile, par un jeu convenable des robinets, de faire rentrer une très-petite quantité d'air. A chaque rentrée on excitait la phosphorescence.

Pour démontrer que le phosphore ne luit pas dans une atmosphère gazeuse complétement privée d'oxygène, M. Müller ([1]) procède de la manière suivante : une cornue ou une cloche courbe est remplie par un mélange de sulfate de protoxyde de fer et de potasse; il se forme un précipité d'hydrate de protoxyde de fer qu'on réunit dans la panse; l'ouverture de la cloche étant placée sur la cuve à eau, on y fait pénétrer le gaz sur lequel on veut expérimenter. Au contact de l'oxyde il se dépouille des traces d'oxygène qu'il peut contenir et un bâton de phosphore mis dans ce gaz ne donne pas de phosphorescence; on la provoque, au contraire, en faisant rentrer la moindre bulle d'air ou d'oxygène.

3. Les expériences de la troisième série sont beaucoup plus difficiles. On ne saurait imaginer *a priori* combien il faut de précautions pour éviter complétement l'accès de l'air dans un appareil. Avec un appareil un peu compliqué et dans lequel on ne peut se passer de bouchons, cela me paraît presque impossible. Je n'ai pu réussir, dans ce cas, qu'en noyant dans l'eau tous les bouchons et tous les raccords de l'appareil.

Fig. 1.

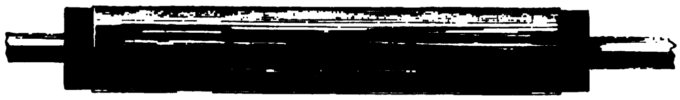


La chose peut, du reste, se faire d'une manière assez simple. Chaque tubulure (*fig.* 1) fermée par un bouchon est entourée d'un col

([1]) Müller, *Sur la phosphorescence du phosphore* (*Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, 1872; *Ann. de Pogg.*, t. CXLI, p. 95).

en verre rempli d'eau; cette eau était bouillie pour plus de sûreté et recouverte d'une couche d'huile, autant pour empêcher l'évaporation que la dissolution d'une nouvelle quantité d'oxygène. Chaque raccord (*fig.* 2) est entouré d'un tube plus large fermé par des bouchons

Fig. 2.



à ses deux extrémités et percé en haut de deux petits trous pour le remplir. De cette manière la fermeture est parfaite; les masticages ne présentent pas la même certitude.

Mais on peut réussir avec des appareils beaucoup plus simples.

Pour l'azote, j'emploie deux flacons à tubulure inférieure reliés entre eux comme dans les appareils continus de M. Deville. Celui qui porte le tube abducteur est rempli d'azote impur obtenu par la combustion du phosphore dans l'air atmosphérique, l'autre d'une dissolution de pyrogallate de potasse. Le second flacon étant placé sur un support à crémaillère, on peut régler avec la plus grande facilité l'écoulement du gaz, qui est d'une pureté absolue et ne donne pas lieu à la moindre trace de phosphorescence.

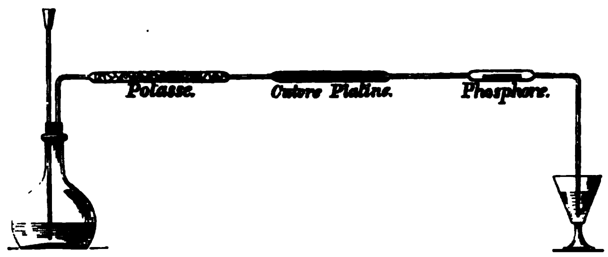
Pour l'acide carbonique, j'emploie le procédé de M. Bunsen [1], la craie et l'acide sulfurique concentré dans un petit ballon. Le dégagement est très-régulier, et en chauffant plus ou moins, mais toujours très-doucement, on peut le régler à volonté. Le phosphore était placé dans un renflement soufflé dans la partie horizontale du tube abducteur; une fois l'air chassé, la phosphorescence disparaît d'une manière absolue.

Pour l'hydrogène, l'appareil ne peut être aussi simple; car, même en employant le zinc et l'acide sulfurique purs du commerce, je n'ai pu obtenir de gaz sans odeur. Or l'hydrogène sulfuré et les carbures d'hydrogène mettent obstacle à la phosphorescence : il faut donc les éliminer. J'y ai réussi en faisant traverser au gaz une colonne de potasse caustique et le faisant passer sur du cuivre réduit par l'hydrogène

[1] BUNSEN, *Méthodes gazométriques*.

chauffé au rouge et enfin sur de la mousse de platine également chauffée (*fig.* 3). Tout l'appareil est formé d'un seul tube convenablement étiré. Le phosphore reste parfaitement obscur. Le gaz qui se dégage n'a d'autre odeur que celle du phosphore. Il est très-facile de se convaincre

Fig. 3.



que la phosphorescence n'est point empêchée par des gaz étrangers. Il suffit en versant du liquide par le tube à entonnoir d'entraîner dans l'appareil une bulle d'air; quelques instants après, la phosphorescence se déclare et persiste pendant quelque temps, à condition, bien entendu, qu'on ne chauffe pas la mousse de platine; si celle-ci est chauffée, la phosphorescence ne reparait pas.

La difficulté de préparer des gaz non souillés d'oxygène explique facilement les méprises des observateurs qui ne s'étaient pas mis suffisamment en garde contre cette cause d'erreur. Souvent c'est par le tube abducteur plongé dans le mercure que se fait la rentrée de l'oxygène; on voit des colonnes lumineuses monter dans ce tube et marcher vers le phosphore. Il m'est arrivé à plusieurs reprises d'avoir une phosphorescence constante dans une petite cloche placée sur le mercure et qui contenait un bâton de phosphore, alors que l'oxygène devait être depuis longtemps épuisé. Il suffisait de verser une couche d'eau ou d'huile à la surface du mercure pour que toute trace de phosphorescence disparût immédiatement et pour toujours. L'air se glissait donc entre le verre et le mercure. Il n'en est pas toujours ainsi; mais il suffit que le fait se présente quelquefois, sans cause apparente, pour qu'il y ait lieu de s'en méfier toujours. On verra plus loin ce qui se passe quand le gaz est placé sur l'eau.

Il résulte de tout ceci que le phosphore se montre comme un réactif d'une sensibilité extrême pour l'oxygène. J'avais commencé, il y a déjà

quelques années, à l'employer pour étudier quelques questions de dissociation. Dans un courant d'acide carbonique parfaitement pur et ne donnant pas trace de phosphorescence, je plaçais la substance à étudier, oxyde d'argent, oxyde de mercure, mélange de chlorate de potasse et d'oxyde de manganèse, etc., et j'élevais la température jusqu'à ce que la phosphorescence se produisit; elle avait lieu à des températures relativement très-basses, même à la température ordinaire pour le dernier mélange. J'avais surtout en vue d'étudier les oxydes qui, comme l'oxyde de zinc, peuvent, bien que fixes, être volatilisés et cristalliser dans un courant gazeux; mais ces expériences n'ont pas été poussées assez loin ni suffisamment répétées pour que je puisse considérer leur résultat comme certain. Je me propose de les reprendre aussitôt que le temps me le permettra.

III. — *Conditions physiques de la phosphorescence.*

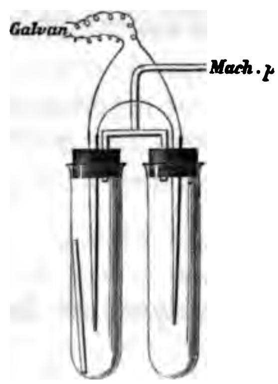
La phosphorescence est un phénomène de combustion : j'ajoute que l'oxydation porte exclusivement sur la vapeur de phosphore. C'est une conséquence à laquelle conduit nécessairement l'observation pure et simple du phénomène; du reste, tous les observateurs sont unanimes sur ce point.

Cette combustion de la vapeur de phosphore est une combustion ordinaire se produisant avec dégagement de chaleur et de lumière, cette lumière étant celle de la phosphorescence. Si la chaleur ne se manifeste pas davantage à l'extérieur, cela est dû, comme dans l'expérience des papillons de M. Schlœsing ou dans les tubes de Geissler, à la petitesse de la masse incandescente. Tout le monde sait d'ailleurs que la chaleur développée peut devenir assez grande pour déterminer l'inflammation de la masse totale du phosphore, et qu'on arrive d'une façon certaine à ce résultat en soumettant du phosphore entouré de coton au vide de la machine pneumatique. Dans cette expérience de Van Marum [1] on favorise la combustion, comme nous le verrons plus

[1] Van Marum, *Verhandelingen van Teylers tweddc genotschap*, Leyde. — *Annales de Chimie*, t. XXI, p. 158; 1797. — Bache (*Ann. Pogg.*, t. XXIII, p. 151) montre qu'un grand nombre de substances pulvérulentes peuvent remplacer le coton.

loin, par suite on augmente la quantité de chaleur développée, et l'on empêche sa déperdition. Du reste, je me suis assuré, sans savoir que l'expérience avait déjà été faite par Melloni et Nobili ([1]), que cet échauffement, difficile à constater avec les thermomètres ordinaires, peut être mis en évidence par la pile thermo-électrique. Deux petits

Fig. 4.



éléments, argentan et fer (*fig.* 4), accouplés en sens contraires, étaient en relation avec un galvanomètre à miroir. Chacun était renfermé dans un petit tube en verre mince et les deux tubes plongés dans un bain d'eau agité constamment. Ces deux tubes communiquent entre eux et, avec une pompe à mercure, on pouvait y amener simultanément la pression à un degré quelconque. L'un de ces tubes contenait un bâton de phosphore; les tubes étant pleins d'oxygène à la pression ordinaire et la phosphorescence étant nulle, on déterminait la position du barreau; puis on raréfiait le gaz de manière à déterminer la phosphorescence; le galvanomètre accusait immédiatement du côté du phosphore une élévation de température qui allait en croissant au fur et à mesure qu'on raréfiait l'oxygène.

Cette combustion de la vapeur de phosphore par l'oxygène présente une particularité remarquable, c'est qu'elle n'est possible qu'entre certaines limites de composition du mélange. A une température donnée

([1]) MELLONI et NOBILI, *Recherches sur plusieurs phénomènes calorifiques au moyen du thermomultiplicateur* (*Annales de Chimie et de Physique*, 2ᵉ série, t. XLVIII, p. 198).

et, par suite, pour une tension donnée de la vapeur de phosphore, la combinaison n'a plus lieu, si la quantité d'oxygène ou, ce qui revient au même, si la pression de l'oxygène est trop grande ; elle n'a plus lieu non plus si cette pression devient trop petite.

La première partie de cette proposition trouve sa démonstration dans le fait si connu, et signalé pour la première fois par Fourcroy (1), de la non-phosphorescence du phosphore dans l'oxygène pur à la température et à la pression ordinaires et de son apparition quand on vient à diminuer la pression de cet oxygène, celle de la vapeur de phosphore restant constante. Quant à la seconde partie, je vais citer en détail, entre beaucoup d'autres, quelques observations qui mettent hors de doute, il me semble, son exactitude.

1. Un tube de 20 millimètres de diamètre, fermé par un bout et continué à l'autre par un tube de 5 millimètres de diamètre environ, renfermant un mince bâton de phosphore (2), est mis en communication avec la pompe à mercure et rempli d'oxygène. L'oxygène étant à la pression ordinaire, la phosphorescence est nulle; au premier coup de pompe elle apparaît sur toute la surface du bâton et s'étend à mesure que le vide s'opère. A un moment, le tube tout entier est plein d'une vapeur brillante, de couleur laiteuse; mais la surface du bâton n'est plus aussi brillante, elle cesse même d'être lumineuse, et le nuage phosphorescent s'en écarte de plus en plus; enfin le nuage lumineux abandonne les parties inférieures du tube et, s'élevant peu à peu, va se perdre dans le tube de caoutchouc qui le relie à la machine. Le tube était alors complétement obscur, mais l'appareil ne tenait pas parfaitement; deux minutes après le tube s'illumine tout d'un coup pendant quelques secondes, puis tout rentre dans l'obscurité; deux minutes après, nouvelle apparition de lueurs, et toutes les deux minutes, avec une régularité admirable, la même succession de phénomènes se reproduisait.

---

(1) Fourcroy, *Mémoires de l'Académie des Sciences pour* 1788.

(2) Dans toutes mes expériences je me suis servi de petits bâtons de phosphore ayant environ 4 à 6 millimètres de diamètre. Ils étaient préparés au moment même où l'on devait s'en servir. Le phosphore employé était du phosphore purifié du commerce. On le faisait chauffer pendant quelque temps dans de l'eau ammoniacale, puis on le lavait avec soin. Il était alors presque blanc, très-transparent et très-flexible.

L'expérience a duré plus de trente-six heures; le manomètre montait de $\frac{1}{3}$ de millimètre environ par heure. Or il est évident que l'air ne rentrait pas tout d'un coup, mais d'une manière continue; seulement il fallait deux minutes environ pour qu'il s'accumulât la quantité d'oxygène nécessaire à l'inflammation.

2. Une petite cloche de 20 millimètres de diamètre et 250 millimètres de hauteur, contenant un bâton de phosphore, repose sur l'eau et est à moitié remplie d'un gaz dépouillé de son oxygène. La phosphorescence n'a plus lieu; mais si l'on regarde attentivement dans une obscurité profonde et avec des yeux rendus sensibles par un séjour un peu long dans l'obscurité, on voit, à des intervalles parfaitement réguliers, un petit nuage lumineux se former au-dessus de l'eau et grandir progressivement jusqu'au haut du tube; puis l'obscurité se fait jusqu'à ce qu'il se reforme un nouveau nuage, et ainsi de suite indéfiniment. L'explication de ce fait est simple et me semble démonstrative. L'oxygène dissous dans l'eau se diffuse d'une manière continue dans la partie supérieure de l'éprouvette et s'y accumule de plus en plus jusqu'à ce que sa quantité soit suffisante; alors l'inflammation se produit à la partie inférieure, où la quantité d'oxygène est la plus grande et où les conditions requises se trouvent tout d'abord remplies, et de là l'inflammation se communique à tout le mélange.

3. Voici encore une expérience très-simple : Un bâton de phosphore est placé horizontalement dans un ballon; un tube un peu étroit ouvert aux deux bouts traverse le bouchon et vient aboutir un peu au-dessus du milieu du bâton. Quand l'oxygène est épuisé, la phosphorescence cesse, mais pas d'une manière absolue. De temps en temps une lueur apparaît au milieu du bâton de phosphore à l'orifice du tube, puis se propage horizontalement, couvre tout le bâton et s'éteint au bout de quelques instants. Si l'air arrive en plus grande quantité, la phosphorescence est continue et le ballon présente l'aspect d'une boule laiteuse; si l'air a un accès trop facile, il n'y a de phosphorescence qu'à la surface du bâton, là où la vapeur de phosphore se trouve en quantité suffisante.

J'ajoute que ce fait d'une phosphorescence intermittente et régulière avait déjà été observé. J'ai trouvé dans les *Annales de Poggen-*

dorff une Note de Munck af Rosenchold (¹) où il est question d'un briquet phosphorique hors d'usage dans lequel l'apparition des lueurs se reproduisait avec une grande régularité toutes les sept secondes.

Je ne crois pas que l'on puisse donner de ce phénomène une autre explication que celle qui précède. On ne saurait prétendre, par exemple, que la durée de l'intermittence est le temps employé par la vapeur de phosphore pour se reformer; car la vapeur de phosphore se produit très-facilement, et la preuve, c'est que, toutes les conditions restant les mêmes, si l'oxygène affluait en plus grande quantité, on aurait une phosphorescence continue.

Voici, d'après cela, comment j'envisagerais la marche du phénomène.

Considérons un morceau de phosphore dans un espace fermé, de température constante et tout d'abord absolument vide. Cet espace se saturera de vapeur de phosphore, et la force élastique de ces vapeurs restera invariable pendant tout le cours de l'expérience, quels que soient les gaz introduits plus tard dans cet espace, à la condition qu'ils n'exercent aucune action chimique sur les vapeurs de phosphore.

Cela posé, faisons entrer dans l'espace en question de l'oxygène d'une manière lente et progressive, et de telle sorte qu'à chaque instant le mélange gazeux puisse être considéré comme homogène. Tout d'abord la quantité d'oxygène sera *trop petite* pour la quantité de phosphore, et l'inflammation n'aura pas lieu. La pression de l'oxygène croissant progressivement, il arrivera un moment où l'inflammation se produira dans toute la masse et, à partir de ce moment, le mélange deviendra de plus en plus combustible et passera par un maximum de combustibilité quand la pression de l'oxygène sera le triple de celle de la vapeur de phosphore; puis elle ira progressivement en décroissant jusqu'au moment où, la quantité d'oxygène devenant *trop grande*, on aura dépassé de l'autre côté les limites de la combustibilité. Il y aurait donc pour chaque température deux limites entre lesquelles la combustion du phosphore par l'oxygène serait possible et en dehors desquelles elle ne pourrait avoir lieu.

(¹) Munck af Rosenchold, *Poggendorff's Annalen*, Bd. XXXII; 1834.

Enfin, en poursuivant cet ordre d'idées, ne serait-il pas permis de se demander si l'on ne se trouverait pas là en présence d'une loi générale et si l'on n'aurait pas sous les yeux, à la température ordinaire, ce qui aurait lieu pour l'hydrogène et l'oxygène, par exemple, à une température de 500 degrés? Ce sont là d'ailleurs des questions très-délicates, sur lesquelles il est difficile de se prononcer.

Quoi qu'il en soit, le phénomène présenté par le phosphore n'est pas un phénomène isolé, et j'ai pu le constater d'une manière certaine pour deux autres corps, le soufre et l'arsenic.

On lit dans Berzélius (¹) que si l'on frotte un morceau de soufre sur une brique chaude, mais non suffisamment pour l'enflammer, les traces liquides laissées par le soufre sur la brique sont visibles dans l'obscurité et laissent échapper des nuages lumineux; que d'ailleurs ce phénomène n'est pas dû à une oxydation du soufre, mais à sa transformation en vapeur, etc. Je crois même pouvoir affirmer que c'est cette expérience qui a suggéré à Berzélius sa théorie de la phosphorescence du phosphore. Les deux phénomènes sont en effet identiques, et l'un comme l'autre doit être attribué à l'oxydation.

Si l'on chauffe vers 200 degrés du soufre dans un tube à essai, le soufre reste obscur, mais au-dessus de lui s'élèvent des nuages lumineux.

Si l'on chauffe le soufre jusqu'à l'ébullition, dans un courant d'acide carbonique pur, il n'y a pas trace de phénomène lumineux. Il en est de même si l'on chauffe le soufre dans le vide de la pompe à mercure.

Enfin, dans l'oxygène pur, mêmes résultats que pour le phosphore.

Un tube de verre de 15 millimètres de diamètre, fermé à un bout et suivi à l'autre par un tube plus fin, contient quelques grammes de soufre et communique avec la pompe à mercure. On chauffe le soufre avec un bec Bunsen dont la flamme est convenablement masquée; la température est d'environ 200 degrés. Des nuages phosphorescents s'élèvent dans le tube; on fait le vide, ils disparaissent. On fait rentrer de l'oxygène pur à la pression ordinaire, la phosphorescence reparait, mais faible; on diminue la pression de l'oxygène, la phosphorescence devient plus vive; enfin elle disparait quand le vide est à peu près com-

(¹) Berzélius, *Handbuch der Chemie*, Bd. I, s. 185, 1843. — Édition française, t. I, p. 177; 1845.

plet. On répète plusieurs fois ces alternatives; à plusieurs reprises on augmente la température, et chaque fois une explosion se produit dans le tube.

J'ai obtenu exactement les mêmes effets avec l'arsenic, sauf l'explosion dont je viens de parler en dernier lieu; seulement il faut élever un peu plus la température. Les nuages phosphorescents dans le tube à essai sont très-brillants; pas de trace de phosphorescence dans l'acide carbonique pur et dans le vide; phosphorescence plus vive dans l'oxygène un peu raréfié que dans l'oxygène pur.

Ainsi voilà deux corps simples tout aussi phosphorescents que le phosphore, seulement à une température plus élevée. Je pense qu'il en est de même du zinc, de l'antimoine, du cuivre, et que c'est à cette cause qu'il faut attribuer les nuages lumineux qui s'élèvent au-dessus des deux premiers métaux fondus, mais loin encore de leur température d'inflammation, et que je crois me rappeler avoir vus aussi au-dessus du cuivre; mais, comme ici le phénomène n'a lieu qu'à une température supérieure au rouge, il est bien plus difficile à constater, noyé qu'il est dans la lumière environnante.

Je suis convaincu qu'on ramènerait à la même cause les phénomènes lumineux présentés par un grand nombre de corps classés parmi les corps phosphorescents; mais pas tous évidemment : par exemple, le fluorure de calcium, le seul corps sur lequel j'aie fait des expériences décisives.

Du fluorure de calcium de la variété verdâtre, chauffé dans un courant d'acide carbonique pur passant depuis près de trente heures, et dans lequel un morceau de phosphore restait complétement obscur, devenait aussi lumineux que dans l'air. Il était également lumineux dans le vide. D'ailleurs, l'aspect du phénomène est tout autre qu'avec le phosphore et les corps dont je viens de parler : ce n'est plus une vapeur, c'est la masse totale du corps qui est lumineuse et qui présente la semi-transparence des corps incandescents.

IV. — *Bulles phosphorescentes.*

C'est un fait bien connu que l'eau dans laquelle a séjourné du phosphore donne des lueurs dans l'obscurité quand on l'agite. La plupart

des auteurs refusent, je ne sais pourquoi, au phosphore un degré quelconque de solubilité dans l'eau et attribuent le phénomène en question à des particules, des poussières de phosphore qui se seraient détachées des bâtons. Quand dans certaines conditions des bulles gazeuses traversent cette eau, ces bulles deviennent lumineuses. M. Müller (1) donne le fait comme nouveau, mais je le trouve signalé d'une manière très-explicite dans un Mémoire de Vauquelin (2) et dans le Mémoire de Berthollet (3) dont il a déjà été question. Je vais décrire les expériences que j'ai faites sur ce sujet : elles continueront à éclaircir les faits qui précèdent.

Il s'agissait d'abord de pouvoir produire à volonté des bulles de gaz très-pur et absolument dépouillé d'oxygène. J'ai employé avec beaucoup d'avantage l'appareil à azote décrit précédemment.

D'un autre côté, j'ai disposé sur le mercure plusieurs séries d'éprouvettes, de 20 millimètres de diamètre et 200 à 300 millimètres de hauteur, remplies à moitié de mercure, à moitié d'eau, dans diverses conditions.

A, eau absolument privée d'air et un bâton de phosphore;
B, eau ordinaire aérée et un bâton de phosphore;
C, eau ayant séjourné au contact du phosphore.

Pour obtenir les éprouvettes A, contenant de l'eau absolument privée d'air, je m'y prends de la manière suivante : de l'eau est mise en ébullition dans un ballon muni d'un tube adducteur; après que la vapeur est sortie en jet pendant une demi-heure environ, l'extrémité du tube est enfoncée dans le mercure; puis la cloche exactement remplie de mercure est amenée au-dessus du tube; la vapeur y pénètre en se condensant et en donnant lieu à des soubresauts violents, mais sans danger pour la cloche si on la tient solidement. Quand celle-ci est pleine d'eau, on la reverse sous le mercure et on la remplit de nouveau, mais seulement jusqu'à moitié. Quand l'eau est refroidie on y introduit un bâton

---

(1) MÜLLER, *Sur la lumière du phosphore* (*Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, 1870; *Ann. Pogg.*, t. CXLI.

(2) VAUQUELIN, *Rapport fait à la Société philomathique sur l'eudiomètre de Seguin*.

(3) BERTHOLLET, *Journal de l'École Polytechnique*, 3e cahier, p. 277.

de phosphore préparé à l'instant et démoulé sous le mercure même de la cuve.

L'azote introduit bulle à bulle dans la cloche A ne donne lieu à aucun phénomène : pas d'oxygène, pas de phosphorescence.

Dans B et C chaque bulle est vivement lumineuse; quand elle crève à la surface de l'eau, elle se continue sous forme d'un petit nuage lumineux.

Les expériences ayant été répétées un grand nombre de fois, le mercure finit par être refoulé de l'éprouvette A, et l'eau vient se répandre en couche mince à la surface du mercure; elle y forme immédiatement une très-belle nappe lumineuse d'où s'élèvent des nuages phosphorescents.

Dans B et C les bulles finissent par n'être plus lumineuses, l'oxygène finissant par être épuisé dans B; et dans C soit l'oxygène, soit le phosphore.

Si, au lieu de prendre de l'azote parfaitement pur, on fait passer dans une autre série de cloches de l'hydrogène, de l'azote, de l'acide carbonique provenant d'un appareil monté avec soin dans les conditions ordinaires, chaque bulle, même dans A, est vivement phosphorescente.

Si l'on fait passer de l'air ordinaire, aucune bulle n'est phosphorescente, mais des nuages se forment au-dessus du liquide.

Avec l'oxygène pur, les bulles ne sont pas phosphorescentes, et il ne se forme pas de nuages phosphorescents au-dessus du liquide.

Ces faits me paraissent parfaitement concluants.

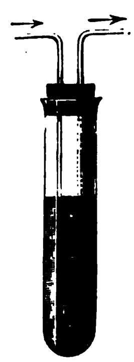
Dans chaque bulle qui se forme au sein de l'eau se diffuse de la vapeur de phosphore. S'il s'y trouve en même temps de l'oxygène en petite quantité, la phosphorescence a lieu; s'il est en quantité trop grande, elle ne se produit plus. A la température ordinaire, la quantité contenue dans l'air est déjà trop grande.

Dans les tubes B et C, chaque bulle d'azote pur formant un vide au milieu du liquide, du phosphore et de l'oxygène s'y diffusent à la fois, et la combinaison a lieu. L'expérience ayant réussi avec de l'eau prise dans un flacon de phosphore bien fermé où elle était depuis plus de six mois, il en résulte que l'oxygène dissous dans l'eau et le phosphore qui s'y trouve, à quelque état que ce soit, ne se combinent pas entre

eux. J'ai cherché à vérifier le fait par une expérience directe. J'ai rempli à moitié d'eau aérée une éprouvette placée sur le mercure, puis j'y ai fait passer un bâton de phosphore préparé à l'instant avec du phosphore très-pur et lavé très-soigneusement. Au bout de deux mois, l'eau ne présentait pas la moindre trace d'acidité, et les bulles d'azote y étaient parfaitement phosphorescentes. Une seconde éprouvette placée en même temps à côté, mais l'orifice en haut et ouvert, a donné au bout de quelques jours des traces très-marquées d'acidité. Je pense donc que l'eau des flacons où l'on conserve le phosphore devient acide de la manière suivante : le phosphore dissous dans l'eau émet des vapeurs à la surface, ces vapeurs se combinent avec l'oxygène de l'air, et le produit acide de la combustion retombe dans l'eau du flacon et s'y dissout.

Ces expériences préliminaires ayant établi rigoureusement la condition de phosphorescence des bulles, je les ai poussées un peu plus loin d'une manière plus simple, en me contentant de faire passer les bulles gazeuses dans un tube à essai faisant fonction de flacon laveur et contenant de l'eau et un petit bâton de phosphore (*fig.* 5).

Fig. 5.



Avec l'oxygène pur ou à peu près : rien, sauf des nuages phosphorescents à la sortie de l'appareil.

Avec de l'oxygène à 20 pour 100 d'azote : même résultat.

Avec l'air : bulles non phosphorescentes, mais nuages lumineux au-dessus du liquide.

Mélange d'azote et d'oxygène contenant 15 pour 100 d'oxygène :

bulles non phosphorescentes, mais les nuages sont plus lumineux qu'avec l'air.

Mélange d'azote et d'oxygène contenant 10 pour 100 d'oxygène : bulles lumineuses, mais non dans tout leur parcours; elles ne le deviennent qu'à 1 centimètre environ de la surface.

Mélange d'azote et d'oxygène contenant 5 pour 100 d'oxygène : bulles très-phosphorescentes dans tout leur parcours; elles présentent un maximum d'éclat vers le milieu de la colonne liquide.

Ainsi, à la température des expériences, qui était de 12 à 13 degrés, il ne commençait à y avoir de bulles lumineuses qu'avec l'azote contenant au plus 10 pour 100 d'oxygène, et encore la quantité de phosphore diffusée ne devenait suffisante qu'à une petite distance de la surface.

Dans l'azote contenant 5 pour 100 d'oxygène les bulles sont magnifiques et présentent un maximum d'éclat dans le milieu de leur parcours. Plus bas, la quantité de phosphore diffusée est insuffisante; plus haut, elle devient trop grande pour la quantité d'oxygène qui reste.

Les phénomènes s'expliquent donc dans leurs plus petits détails. Voici encore une expérience que je trouve dans le *Traité de Chimie* de Berzélius (¹).

« L'eau dans laquelle on conserve du phosphore possède la singulière propriété de luire dans une bouteille bien bouchée, toutes les fois qu'on l'agite, et de répandre quelquefois, sans cause apparente, une lueur qui se dissipe instantanément. Lorsqu'on découpe une figure dans un morceau de papier noir et qu'on le colle ensuite sur la bouteille, on voit, chaque fois qu'on agite le flacon dans l'obscurité, la figure se dessiner en traits lumineux. Si l'on enlève le bouchon ou si on ne l'ajuste pas bien, l'eau perd de suite sa propriété de luire et ne la recouvre qu'après que la bouteille est restée bouchée pendant quelque temps. C'est là encore un phénomène dont nous n'avons point l'explication. »

L'explication est bien simple : il n'y a de lueurs que quand on agite, car c'est alors seulement, au sein des bulles, que le phosphore en vapeur peut se rencontrer avec l'oxygène. Si le flacon est ouvert,

---

(¹) Berzélius, *Traité de Chimie*, t. I, édition française, p. 188.

c'est de l'air qu'on a au-dessus du liquide, de l'azote à 21 pour 100 d'oxygène, qui ne donne pas de bulles phosphorescentes. Si le flacon est resté quelque temps fermé, l'oxygène de l'air a disparu en tout ou en partie, et alors les bulles sont phosphorescentes, aux dépens de l'oxygène qui reste dans l'air du flacon et de celui qui se trouve dissous dans l'eau.

L'éclat des bulles phosphorescentes qu'on obtient avec l'azote mêlé à 4 ou 5 pour 100 d'oxygène et de l'eau ayant séjourné au contact du phosphore me fait penser qu'on aurait dans ces bulles un procédé très-sensible pour révéler la présence du phosphore en nature, et qui, dans certains cas, pourrait être substitué avec avantage au procédé de Mitscherlich. Quand la quantité de phosphore est très-petite, on n'obtient avec l'appareil de Mitscherlich qu'un phénomène fugitif et de l'apparition duquel on n'est pas maître. Au contraire, l'eau qui a séjourné au contact d'une quantité de phosphore incroyablement petite, et qui d'ailleurs n'en a point paru diminuée, peut donner avec le mélange convenable d'azote et d'oxygène des bulles phosphorescentes qu'on peut produire à volonté, et dont on peut laisser passer un très-grand nombre dans le liquide avant que la phosphorescence cesse de se produire.

V. — *Forces élastiques de la vapeur de phosphore.*

Du moment où la question de proportions entre la vapeur de phosphore et l'oxygène joue un si grand rôle dans la combustibilité du mélange, il était intéressant de déterminer, au moins approximativement, la force élastique de la vapeur de phosphore dans le voisinage des températures atmosphériques. Cette détermination n'a, que je sache, jamais été faite; je n'ai trouvé sur ce sujet que des expériences de M. Schrötter (¹) pour des températures supérieures à 160 degrés et de M. Hittorf (²) pour des températures encore plus élevées.

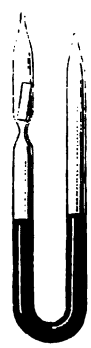
L'appareil dont je me suis servi (*fig.* 6) est un tube en U de 1 cen-

(¹) Schrötter, *Mémoires de l'Académie de Vienne*, t. I, p. 130; *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XXIV, p. 406.

(²) Hittorf, *Poggendorff's Annalen*, Bd. CXXVI, p. 193.

timètre environ de diamètre intérieur et 20 centimètres de hauteur. Une des branches présente un étranglement, et au-dessus de cet étran-

Fig. 6.



glement est placé un bâton de phosphore. Le liquide qui doit servir à mesurer les pressions et le bâton de phosphore étant introduits, l'appareil était mis en communication, par ses deux branches, avec la pompe à mercure, et le vide se faisait simultanément des deux côtés. Quand il avait été amené aussi loin que possible, on fermait les deux branches à la lampe, et quoique ces fermetures fussent successives, comme l'appareil était en ce moment en communication avec l'ampoule vide de la pompe, il ne pouvait en résulter de différence de pression. Le vide était fait sur l'air, et il n'était évidemment pas absolu. L'erreur qui peut en résulter est bien faible; car, en admettant que le vide soit fait seulement à $\frac{1}{2}$ millimètre, la disparition de l'oxygène du côté du phosphore ne peut entraîner qu'une différence de pression de $\frac{1}{10}$ de millimètre.

L'appareil ainsi préparé était placé dans une grande cuve en tôle, d'une capacité de 40 litres, et fermée par une glace à sa partie antérieure. L'eau était agitée constamment, et la différence des niveaux était relevée au cathétomètre.

J'ai d'abord employé le mercure, mais il s'altère très-vite au contact de la vapeur de phosphore : le ménisque correspondant se déprime, et il en résulte des erreurs de capillarité dont la correction, quand il s'agit de quantités aussi petites, entraîne de grandes incertitudes.

J'ai cru parer à la difficulté en remplaçant le mercure par l'acide sulfurique concentré. Sitôt qu'on a fait le vide, l'acide sulfurique a laissé dégager des bulles; pour faciliter leur départ on a entouré le tube d'eau chaude : le vide a été maintenu pendant toute une journée. Les bulles ayant cessé de se dégager, on a fermé l'appareil; mais il s'est présenté un phénomène curieux : l'acide sulfurique montait constamment du côté du phosphore et accusait entre les deux branches une différence de niveau qui allait continuellement en augmentant. Je n'ai donc pu tirer aucun parti de cet appareil.

On ne pouvait guère songer à l'eau : avec un liquide aussi volatil, il suffirait d'une différence de température très-faible entre les deux branches pour amener des erreurs supérieures aux quantités à mesurer. J'ai eu alors recours à la glycérine.

L'appareil a fonctionné très-correctement, et les tensions observées se retrouvaient identiques, soit qu'on élevât, soit qu'on abaissât la température. Il est du reste curieux de voir avec quelle rapidité la force élastique de la vapeur de phosphore prend son état d'équilibre. La moindre quantité d'eau froide ajoutée au bain amenait immédiatement à la surface du tube un dépôt de cristaux de phosphore. Ces cristaux finissent par acquérir des dimensions assez considérables; ils sont tout à fait transparents et présentent un très-grand éclat, qui rappelle celui du diamant.

Voici les nombres obtenus, exprimés en colonnes de glycérine :

Première série.

°	mm
14,8	0,93
19,1	1,10
23,6	1,59
29,4	2,65
33,7	3,71
39,5	5,31
41,2	5,42
41,6	5,55
42,2	5,69
39,6	5,30
35,4	4,39
33,5	3,65

Première série (suite).

29°,5	2mm,61
25,2	2,24
22,4	1,57
19,10	1,12
17,2	1,02

Deuxième série.

10°,4	0mm,54
10,6	0,57
15,5	0,87
20,14	1,20
25,3	1,91

En voulant modifier l'appareil pour mesurer la force élastique de la vapeur dans le voisinage de zéro, j'ai fait involontairement tomber dans le liquide un petit cristal de phosphore détaché des parois. Quelques instants après il s'était établi une différence de niveau considérable, due au dégagement de quelque gaz résultant de l'action du phosphore sur la glycérine. L'expérience n'a donc pu être continuée.

En prenant la moyenne des résultats fournis par les expériences qui précèdent et réduisant les pressions en colonnes d'eau, on obtient, pour les forces élastiques des vapeurs de phosphore à différentes températures, les valeurs suivantes :

Température.	Force élastique.
5°	0mm,46
10	0,68
15	1,02
20	1,63
25	2,42
30	3,50
35	5,27
40	6,82

Une autre série d'expériences, faites avec un manomètre à mercure, à

des températures supérieures à celle de la fusion du phosphore, a donné les résultats suivants :

Température.	Force élastique.
45°	6,0 mm
50	7,0
55	8,4
60	10,1
65	12,5
70	15,5
75	20,0
80	22,1
85	27,0
90	33,1
95	41,1
100	48,6

Les deux tableaux ne se raccordent pas exactement, mais l'appareil laissait à désirer dans le dernier cas, parce qu'il était resté dans le tube une petite quantité de gaz dont on n'a pu tenir compte que d'une manière approchée, et parce que le niveau du mercure en contact avec le phosphore était difficile à observer. Malgré cette cause d'incertitude sur la valeur numérique des pressions, les nombres du dernier tableau donnent une idée suffisante de la marche du phénomène.

VI. — *Phosphorescence dans l'oxygène pur. Influence de la température.*

J'ai déjà dit que Fourcroy [1] avait le premier signalé ce fait remarquable que le phosphore ne luit pas dans l'oxygène pur à la température et à la pression ordinaires de l'atmosphère.

C'est lui aussi qui, dans le Mémoire fait en commun avec Vauquelin [2] et déjà cité, a fait voir que la phosphorescence, qui n'a pas lieu

---

(1) FOURCROY, *Mémoires de l'Académie des Sciences pour* 1788.

(2) FOURCROY et VAUQUELIN, *loc. cit.*

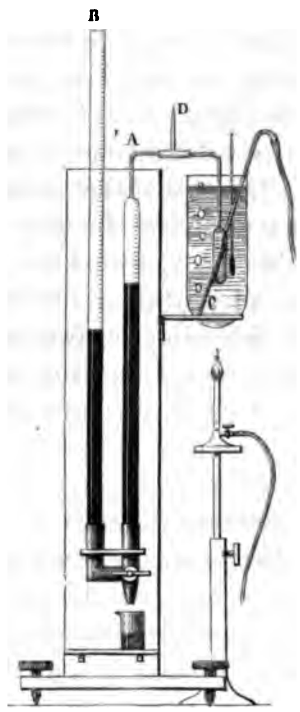
à la température ordinaire, apparaît à 22 degrés R. (27°,5 C.) et se maintient aux températures supérieures.

Plus tard Bellani ([1]) montrait qu'on pouvait faire paraître la phosphorescence sans élever la température, en raréfiant l'oxygène.

Enfin je lis dans une Note de Schweigger ([2]) que plus l'oxygène est raréfié et plus basse est la température à laquelle la phosphorescence commence.

J'ai voulu préciser un peu mieux la pression limite à laquelle commence la phosphorescence à chaque température et pour cette recherche je me suis servi de l'appareil suivant (*fig.* 7).

Fig. 7.



C'est un manomètre à air libre, semblable aux manomètres de M. Regnault. Les deux tubes, de même diamètre (20 millimètres environ),

([1]) Bellani de Munza, *Bulletin de Pharmacie*, 5e année, p. 489, 1813.
([2]) Schweigger, *Schweigger's Journal*, t. XL, p. 70.

reliés inférieurement par un robinet à trois voies, sont gradués en millimètres. Le tube A communique par un tube capillaire avec un réservoir cylindrique de 20 millimètres de diamètre et 150 millimètres de hauteur, contenant un bâton de phosphore. Ce réservoir est placé au milieu d'un cylindre en verre rempli d'eau. Ce cylindre peut être chauffé par la partie inférieure et l'eau maintenue dans un état d'agitation constante au moyen d'une soufflerie dont le vent s'échappe au fond du cylindre.

L'appareil est d'abord mis, par la tubulure latérale D, en communication avec une pompe à mercure. On fait le vide, puis on laisse rentrer de l'oxygène pur; quand cette opération a été répétée trois ou quatre fois, on ferme définitivement le tube D à la lampe.

Pour faire une observation, on verse du mercure par le tube B, de manière à avoir dans l'appareil un excès de pression relativement à la température à laquelle on opère; puis, la température étant bien stationnaire, on fait écouler très-doucement le mercure du tube A, jusqu'à ce qu'on voie apparaître la phosphorescence. On lit la division à laquelle le mercure s'est arrêté dans le tube A, puis, en tournant la clef, on rend la pression du côté A, de manière à faire disparaître toute trace de phosphorescence; au bout de dix minutes, on fait écouler le mercure de A, et l'on fait ainsi cinq ou six observations consécutives à la même température. Chaque fois on lit la division à laquelle a affleuré le mercure dans le tube A. Quelquefois les observations sont tout à fait concordantes, d'autres fois on a des écarts de 10 à 15 millimètres. On prend la moyenne des six observations et, en tournant convenablement le robinet, on amène le mercure du tube A à affleurer à la division moyenne, les deux branches du manomètre communiquant entre elles. On lit la division à laquelle le mercure affleure dans chacune d'elles, et la différence donne ce qu'il faut retrancher de la hauteur barométrique ou lui ajouter pour avoir la pression à laquelle la phosphorescence a apparu.

Cette apparition se fait d'une manière très-nette : l'inflammation se déclare en un point, et instantanément envahit tout le tube. Malgré cette netteté de l'apparition, les expériences consécutives, faites à une même température, présentent entre elles de petites différences, qui ne dépassent du reste jamais le $\frac{1}{60}$ de la pression totale. Ces différences

peuvent tenir à de petites variations de température, à la rapidité plus ou moins grande avec laquelle on a fait écouler le mercure; mais je crois qu'il faut les attribuer surtout à la nature même du phénomène qui, comme tout phénomène limite, ne peut jamais, si je puis m'exprimer ainsi, offrir de contours bien arrêtés.

Un point important est de laisser un intervalle suffisant entre deux expériences consécutives, de manière à laisser se dissiper la chaleur produite par l'inflammation précédente. C'est cette circonstance qui rend impossible la marche inverse de celle que j'ai suivie, c'est-à-dire celle qui consisterait à observer la pression à laquelle cesse la phosphorescence. Dans ce cas les observations présentent entre elles des écarts beaucoup plus grands.

Je dois enfin signaler une dernière difficulté que j'ai rencontrée dans ces expériences. En faisant, à des époques différentes, avec le même appareil des séries d'observations tout à fait indépendantes, et dans lesquelles le phosphore et l'oxygène avaient été renouvelés, je n'ai pas retrouvé les mêmes nombres absolus, bien que dans chaque série la marche du phénomène fût très-régulière. La différence venait-elle du phosphore ou de l'oxygène? J'ai toujours préparé l'oxygène de la même manière, avec du chlorate de potasse seul, sans mélange d'oxyde.

Je transcris les deux séries les plus complètes que j'aie obtenues :

I.

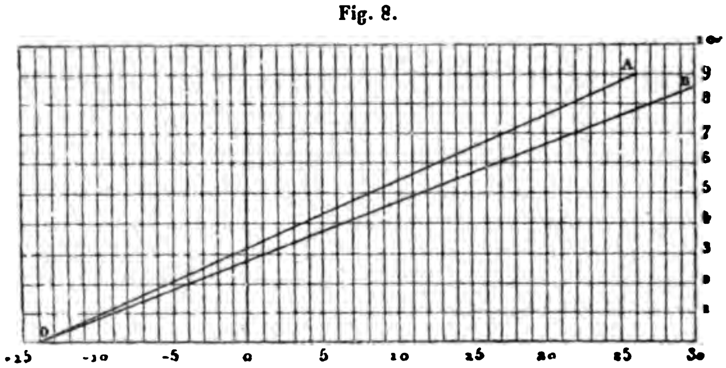
Température.	Pressions observées.	Pressions calculées par la formule $y = 320 + 23,19\,t$.	
1°,4	355	352,5	+ 2,5
3,0	387	389,6	− 2,6
4,4	408	422,0	− 14,0
5,0	428	436,0	− 8,0
6,0	460	459,0	+ 1,0
8,9	519	526,0	− 7,0
9,3	538	535,0	+ 3,0
11,5	580	586,0	− 6,0
14,2	650	649,3	+ 0,7
18,0	730	737,0	− 7,0
19,2	760	765,0	− 5,0

II.

Température.	Pressions observées.	Pressions calculées par la formule $y = 270 + 19{,}57\,t$.	
1°,4	298	297,4	+ 0,6
2,1	316	311,1	+ 5,0
5,1	366	369,8	— 3,8
7,6	425	418,7	+ 6,3
8,2	432	430,5	+ 1,5
11,0	495	485,2	+ 9,8
15,2	570	567,4	+ 2,6
16,0	595	584,0	+ 11,0

En cherchant à construire par points les courbes qui ont les températures pour abscisses et pour ordonnées les pressions, on reconnaît immédiatement que chacune des deux séries est très-exactement représentée par une droite (*fig.* 8). En prolongeant ces deux droites AO et

Fig. 8.



OB, elles viennent se couper en un même point de l'axe des abscisses, à — 13°,8. Si ce n'est pas une coïncidence fortuite, cela indiquerait qu'à cette température la tension de vapeur du phosphore est absolument nulle. Quant à l'inclinaison inégale des deux droites, peut-être pourrait-on l'expliquer par la supposition que dans les deux cas la force élastique de la vapeur de phosphore n'atteignait pas exactement la même valeur. Je n'ai pas cru nécessaire de calculer par des procédés plus ou moins compliqués l'équation de ces droites. En partant du fait qu'elles se coupent au point qui correspond à $t = -13°{,}8$ et

que l'ordonnée à l'origine est 320 pour la première OA et 270 pour la seconde OB, j'ai pris les deux équations

$$y = 320 + 23,19\,t,$$
$$y = 270 + 19,57\,t,$$

et j'ai mis en regard des résultats observés ceux qu'on déduit de ces formules. Les dimensions relatives de l'appareil que j'employais ne m'ont pas permis de pousser les expériences au-dessous de zéro ni au-dessus de 19 degrés pour la première série et 16 degrés pour la seconde. Vauquelin et Fourcroy ont trouvé que la phosphorescence commençait dans l'oxygène pur sous la pression normale à 27°,5. Je lis dans le *Traité de Chimie* de Gmelin que Davy avait trouvé 27 degrés dans certaines expériences et des nombres compris entre 16 et 27 dans d'autres. La première des droites donne 19 degrés, la seconde 24°,8. Je lis aussi dans le même Ouvrage que dans une expérience Davy a trouvé qu'à la pression de $1\frac{1}{2}$ atmosphère la phosphorescence commençait dans l'oxygène pur au point juste de fusion du phosphore. Or, en prenant pour cette température 44°,2, la seconde formule donne pour y 1135 millimètres, ce qui est exactement le nombre trouvé par Davy.

VII. — *Phosphorescence dans les mélanges gazeux renfermant de l'oxygène.*

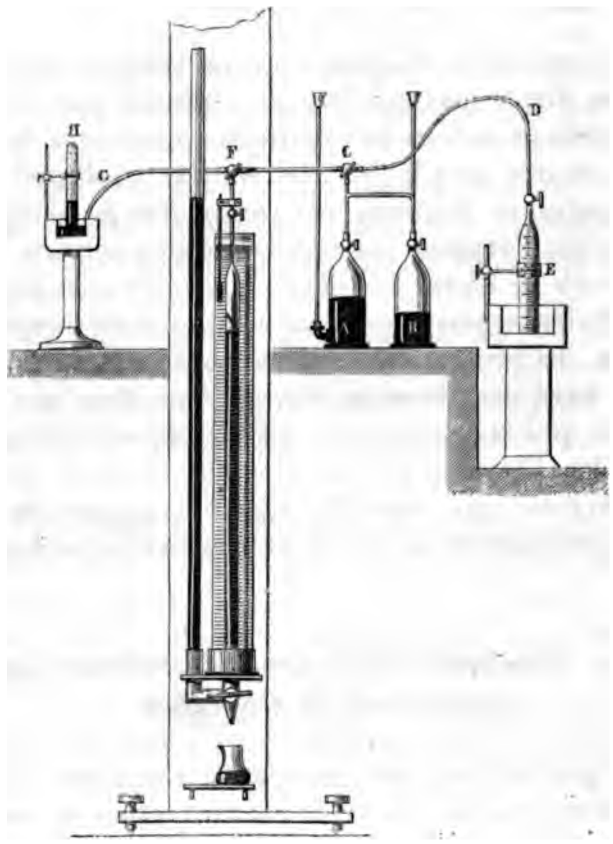
On admet généralement que, lorsque du phosphore est placé dans un mélange d'oxygène et d'un autre gaz sans action chimique sur lui, le gaz inerte n'a d'autre effet que de délayer l'oxygène et que, quelle que soit la composition du mélange, du moment où l'oxygène y possède la pression à laquelle il faudrait le réduire, s'il était pur, pour que la phosphorescence fût possible, la phosphorescence a lieu.

Pour vérifier cette assertion, j'ai employé le procédé suivant (*fig.* 9) :

La partie essentielle de l'appareil est un manomètre analogue à celui qui a déjà été décrit. Les deux tubes sont d'égal diamètre (20 millimètres), tous deux sont divisés en millimètres; le tube ouvert a environ 2 mètres de long; l'autre est fermé par un excellent robinet d'acier de Golaz. Un morceau de phosphore est suspendu à la partie su-

périeure par un fil de platine. Le tube tout entier est renfermé dans un manchon en verre dans lequel circule de bas en haut un courant

Fig. 9.



d'eau continu. Un thermomètre sensible placé à la hauteur du phosphore donne la température qu'on a cherché à conserver la même, autant que possible, pendant tout le cours des expériences faites sur un même gaz. Ces expériences durant nécessairement plusieurs jours, il fallait saisir les occasions favorables.

La marche des expériences est la même que celle qui a déjà été indiquée. Le mélange étant introduit dans le tube, on établit un excès de pression, de manière à empêcher toute phosphorescence. On fait alors couler le mercure du tube fermé jusqu'à ce que la phosphorescence

apparaisse; on rend immédiatement la pression après avoir noté la division où s'est arrêté le mercure. On répète l'expérience cinq ou six fois à des intervalles suffisants. On calcule la position moyenne qu'a prise le mercure et l'on mesure, en mettant les deux branches du manomètre en communication, à quelle pression elle correspond.

La plus grande difficulté était la préparation des mélanges gazeux, leur introduction dans le tube à phosphore et leur analyse. Voici comment j'ai opéré.

L'oxygène et le gaz en expérience, préparés avec tout le soin possible, étaient renfermés dans deux petits gazomètres à mercure A et B, fermés en haut par un robinet en verre. Ces deux gazomètres communiquaient par le robinet à trois voies C et le fil capillaire de cuivre D avec une cloche divisée E, placée sur une cuve profonde. Le robinet C ouvrait aussi la communication du côté du manomètre; enfin en F se trouvait encore un robinet à trois voies permettant de conduire le gaz dans le tube à phosphore ou de le rejeter à l'extérieur par le tube de dégagement G.

On commençait, au moyen du manomètre, par faire le vide dans toute la partie droite de l'appareil; puis, par un jeu convenable des robinets, on faisait dans E un mélange des deux gaz en proportion déterminée. On faisait alors passer une partie de ce mélange dans le tube à phosphore. Une fois les expériences terminées, on refoulait le gaz par le tube abducteur G et on le recueillait dans une petite cloche H ou un eudiomètre, suivant les cas, pour en faire l'analyse. Bien des fois on a fait passer directement une partie du mélange de la cloche E dans la cloche à analyse H. On a pu constater ainsi que, pendant le cours des expériences sur un mélange donné, la composition du mélange ne variait pas d'une manière sensible au contact du phosphore; du reste, comme je l'ai déjà dit, on éteignait la phosphorescence presqu'au moment même où elle commençait à apparaître.

Les résultats obtenus pour chaque gaz étaient portés sur un papier quadrillé, en prenant pour ordonnées les pressions observées et pour abscisses les proportions de gaz inerte contenues dans le mélange. Ainsi l'origine ou l'abscisse zéro correspondait à l'oxygène pur, l'abscisse x au mélange qui, sous un volume 1, contenait x de gaz inerte et $1 - x$ d'oxygène. Si y est la pression observée relative au mélange x,

la force élastique de l'oxygène dans le mélange est évidemment $y(1-x)$: il est donc facile de déduire la courbe des pressions de l'oxygène de celle qui représente les pressions totales.

Avant d'en venir aux résultats de l'expérience, il ne sera pas inutile d'examiner quelle serait la configuration de la courbe ainsi construite dans l'hypothèse énoncée en tête de ce chapitre, savoir que l'oxygène doit avoir dans le mélange exactement la force élastique à laquelle il faudrait le réduire s'il était pur, pour que, la température restant la même, la phosphorescence eût lieu. Soient a cette force élastique et y celle du mélange qui contient x de gaz inerte : la force élastique de l'oxygène dans le mélange est $y(1-x)$, et cette force élastique doit être constante et égale à a; on a donc l'équation

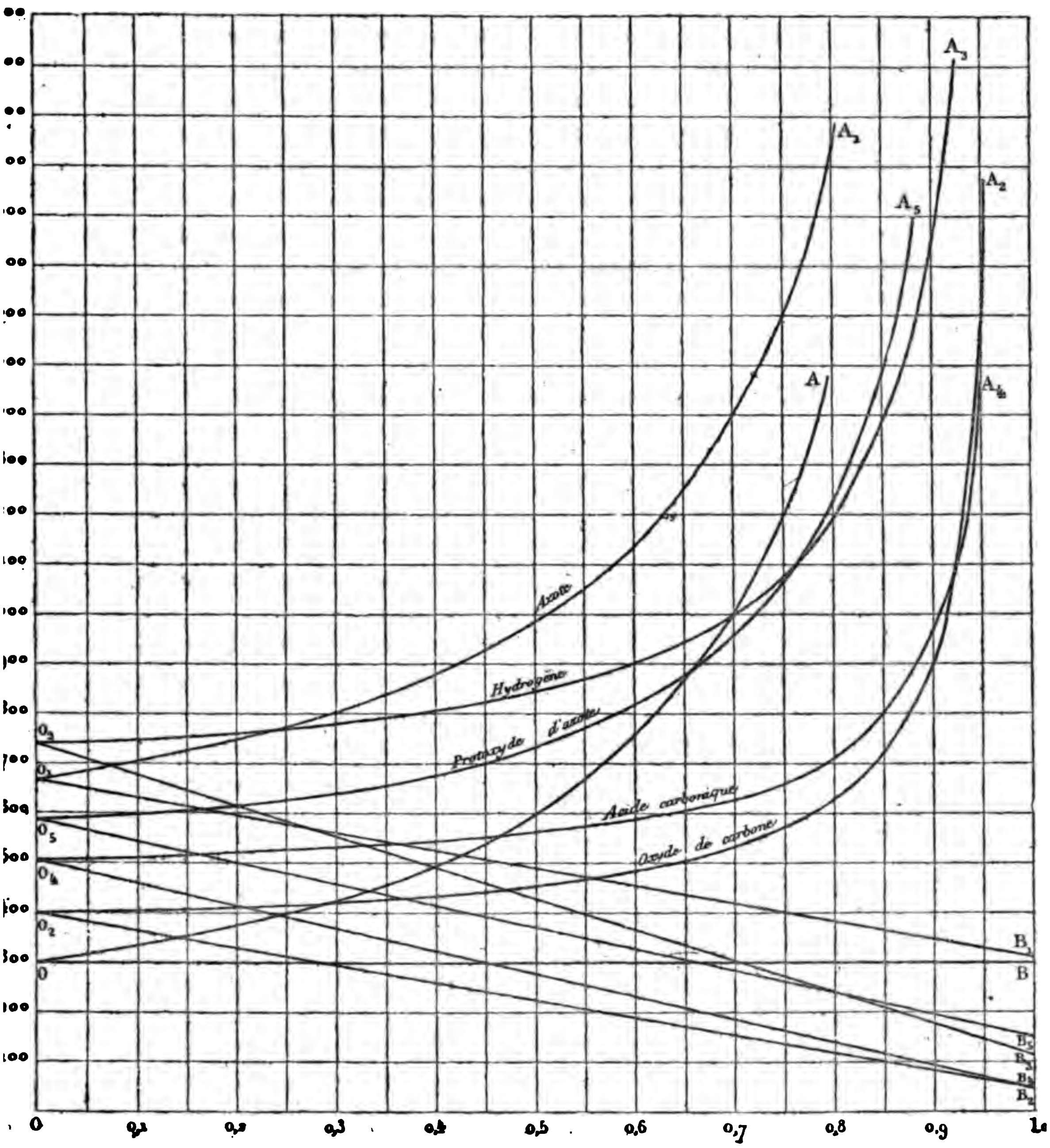
$$y(1-x) = a,$$

équation d'une hyperbole équilatère OA (*fig.* 10) ayant pour asymptotes l'axe des x et la droite $x=1$. Cette hyperbole coupe en O l'axe des y, et le coefficient angulaire de la tangente en ce point a également pour valeur a; quant à la pression de l'oxygène dans le mélange, elle est évidemment représentée par une parallèle OB à l'axe des x, menée à la distance $y = a$.

Je n'ai trouvé ce résultat pour aucun gaz. Les pressions totales sont bien toujours représentées par des hyperboles équilatères; mais ces hyperboles n'ont plus pour asymptote l'axe des x, mais une parallèle à cet axe. La pression de l'oxygène dans le mélange est bien représentée par une droite, mais cette droite n'est pas parallèle à l'axe des x; elle a toujours un coefficient angulaire négatif, et s'approche par suite de l'axe des x à mesure que x augmente. Elle n'a pas du reste la même inclinaison pour les différents gaz essayés, ce qui prouve que la nature du gaz a une influence; laquelle? C'est ce que je n'ai pu encore apercevoir.

Il eût été désirable, pour faciliter les comparaisons, que les courbes relatives aux différents mélanges gazeux fussent toutes rapportées à une même température. Il eût fallu pour cela, ou que toutes les expériences fussent faites à une même température, ce qui est évidemment impossible, ou que pour chaque mélange on fît plusieurs séries d'observations à des températures notablement différentes, de manière à

Fig. 10. — *Limite supérieure des pressions auxquelles se produit la phosphorescence dans un mélange d'oxygène et d'un gaz sans action sur le phosphore.*



pouvoir, pour chaque mélange donné, construire la courbe des pressions en fonction de la température; mais il eût fallu, pour cela, multiplier dans une proportion énorme, et peut-être sans aucun profit, les observations. Or ces expériences ne tardent pas à devenir très-fastidieuses : l'obligation de rester de longues heures dans une obscurité absolue, de ne pouvoir commencer les observations qu'après un assez long séjour dans l'obscurité, jusqu'à ce que l'œil ait acquis une sensibilité suffisante; la nécessité, pour faire les lectures ou les diverses manipulations, de ne s'éclairer qu'avec une lumière extrêmement faible sous peine de perdre beaucoup de temps à recouvrer cette sensibilité, sont des conditions de travail peu favorables et pour l'esprit et pour la santé, et à plus d'une reprise j'ai été contraint de m'arrêter.

VIII. — *Résultats obtenus avec les différents gaz.*

Mélange d'azote et d'oxygène. — Tous les observateurs ont remarqué que la phosphorescence est plus vive avec l'azote qu'avec tout autre gaz : aussi est-ce pour ce mélange que les expériences ont été le plus faciles. On déterminait la composition du mélange en absorbant l'oxygène par l'acide pyrogallique et la potasse.

Les expériences ont été faites à des températures comprises entre 15 et 16 degrés. Elles ont donné les résultats suivants :

Composition du mélange. x	Pression observée. y	Pression calculée.	Différence.
	mm	mm	mm
0,000	670	670	0
0,050	685	685	0
0,200	730	747	−17
0,293	790	798	− 8
0,450	945	925	+20
0,500	1010	990	+20
0,600	1129	1135	− 6
0,700	1389	1397	− 8
0,792	1895	1895	0
		Somme =	+ 1

Les nombres de la troisième colonne sont les ordonnées de l'hyperbole $O_1 A_1$ (*fig.* 10) qui a pour équation

$$y(1-x) + 360x - 670 = 0.$$

Leur accord avec les nombres observés est tout à fait satisfaisant, surtout si l'on considère que ces nombres ne correspondent pas exactement à une même température et que les deux observations qui présentent l'écart positif le plus grand sont celles qui ont été faites à la plus haute température.

Les pressions de l'oxygène dans le mélange sont, par suite, données par la formule

$$y = -360x + 670,$$

c'est-à-dire une droite $O_1 B_1$, qui s'abaisse vers l'axe des x avec le coefficient angulaire -360.

Je n'ai pas fait de série d'observations à une autre température; mais j'ai observé avec beaucoup de précision que, sous la pression de 766,5, un morceau de phosphore placé dans un tube de verre de même diamètre que celui du manomètre cessait de luire dans l'air à la température de $7°,2$. Or, à cette température, la pression maximum de l'oxygène pur est 440. Si l'on joint par une droite les deux points correspondant à ces données, on a une ligne exactement parallèle à la première, car son coefficient angulaire est $\frac{5}{4}\left(440 - \frac{1}{5}\,766{,}5\right) = 358{,}4$ (au lieu de 360). Il résulterait de là que, pour avoir les courbes relatives à l'azote pour les différentes températures, il n'y aurait qu'à modifier le terme constant de l'équation et à le remplacer, dans chaque cas, par la pression maxima de l'oxygène pur correspondant à cette température.

Je vais indiquer comment j'ai obtenu le nombre $7°,2$ cité plus haut. Le dimanche 16 février 1873, vers 7 heures du soir, les diverses pièces dépendant du cabinet de Physique du lycée de Montpellier étaient à des températures comprises entre $7°,1$ et $8°,7$. Un morceau de phosphore, suspendu par un fil de platine, a été porté successivement dans ces pièces et observé à distance, de manière à éviter l'influence de l'observateur. Voici les résultats obtenus :

Pièce à 8°,7, phosphorescence assez vive, nuages lumineux.
» 8,6, » moins de nuages.
» 8,5, phosphorescence très-pâle et intermittente.
» 8,4, pas de phosphorescence.

La phosphorescence avait donc lieu dans l'air libre à 8°, 5.

On eut alors l'idée d'introduire le phosphore dans un tube à essai fermé à un bout et de même diamètre à peu près que le tube manométrique. Il luisait dans la pièce dont la température était 8°,4. Il luisait encore très-faiblement dans une pièce dont la température était 7°,3, mais ne luisait plus dans une autre où elle était 7°,1. Il est évident que le tube en verre empêchait le refroidissement du phosphore par voie de rayonnement.

Je ferai encore deux remarques sur les mélanges d'azote et d'oxygène. La première, c'est qu'à la pression atmosphérique ordinaire et à la température de 12 à 13 degrés les bulles qui traversent l'eau en contact avec du phosphore ne sont lumineuses que si le mélange contient au moins 90 pour 100 d'azote. Or, à cette température, il faudrait une pression de $2^{atm},7$ pour empêcher le phosphore de luire dans ce mélange, c'est-à-dire une pression 2,7 fois plus grande. Ce résultat semble s'expliquer facilement et même apporter un nouveau témoignage en faveur de la théorie que j'ai essayé d'établir. Il prouverait tout simplement que la vapeur de phosphore qui émane du phosphore dissous dans l'eau a une force élastique qui n'est que $\frac{1}{2,7}$ de la force élastique maxima à la même température, à moins que la vapeur d'eau n'ait elle-même une influence, ce que je ne crois pas.

La seconde remarque, c'est qu'il me semble y avoir une analogie frappante entre les résultats présentés ici pour le phosphore et ceux auxquels M. P. Bert (1) est arrivé pour la respiration des animaux. Le savant physiologiste a montré que, si l'on fait varier la pression à laquelle l'être vivant est soumis, les proportions d'oxygène et d'azote qui constituent l'air cessent d'être les plus favorables à la respiration; que si la

(1) P. BERT, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 mars 1874, p. 911.

pression augmente, l'air est trop riche en oxygène; que si elle diminue, il est trop pauvre, et que si l'on veut que la respiration continue à s'effectuer sans trouble, il faut faire varier la richesse en oxygène de l'air en sens inverse de la pression. Ainsi M. Bert trouve qu'à la pression de 340 millimètres la respiration s'effectue convenablement dans un mélange contenant 0,55 d'azote, et à la pression de 250 millimètres dans un mélange à 0,37; ou, en adoptant les notations déjà employées, à des valeurs de x égales à

$$0{,}37,\quad 0{,}55,\quad 0{,}792,$$

correspondent des valeurs de y

$$250^{mm},\quad 340^{mm},\quad 760^{mm},$$

et, par suite, des pressions d'oxygène $y\,(1-x)$ égales à

$$157^{mm}{,}50,\quad 153^{mm},\quad 152^{mm},$$

c'est-à-dire que, pour que la respiration s'effectue bien, il faut que l'oxygène ait dans le mélange une pression sensiblement constante et égale à 155 millimètres environ. Ce fait peut s'expliquer très-simplement par les lois de dissolution des gaz : dire que la pression de l'oxygène est constante dans le mélange, c'est dire qu'il s'en dissout toujours dans le sang la même quantité. Toutefois, je ne puis m'empêcher d'être frappé de ce fait, qui me permettra d'exprimer ma pensée en un mot, que si le travail respiratoire consistait à oxyder du phosphore qui serait charrié par le sang, il résulterait de ce qui précède que les choses se passeraient exactement comme elles se passent dans les expériences de M. Bert.

Mélange d'oxygène et d'oxyde de carbone. — On verra tout à l'heure pourquoi je prends ce mélange à la suite du précédent. La phosphorescence y présente peu d'éclat. Les analyses étaient faites, tantôt en absorbant l'oxygène par l'acide pyrogallique et la potasse, tantôt en faisant détoner le mélange et absorbant l'acide carbonique par la potasse. On a employé plusieurs fois les deux procédés simultanément comme vérification.

Les expériences ont été faites à la température de 6°, 5.

Composition du mélange. x	Pression observée. y	Pression calculée.	Différence.
0,000	400^{mm}	400^{mm}	0^{mm}
0,080	402	404	− 2
0,248	412	416	− 4
0,300	430	422	+ 8
0,420	450	436	+ 14
0,440	460	440	+ 20
0,544	470	460	+ 10
0,655	500	497	+ 3
0,675	512	508	+ 4
0,850	720	700	+ 20
0,895	860	830	+ 30
0,900	892	850	+ 42

Les nombres de la troisième colonne sont les ordonnées de l'hyperbole $O_2 A_2$ (*fig.* 10) qui a pour équation

$$y(1-x) + 350\,x - 400 = 0.$$

Ils sont généralement un peu faibles, et l'on aurait un accord plus satisfaisant en modifiant de quelques unités le coefficient de x. La pression de l'oxygène dans le mélange est représentée par la droite $O_2 B_2$, ayant pour équation

$$y = -\ 350\,x + 400,$$

et dont le coefficient angulaire est -350. Pour l'azote nous avions trouvé -360. On peut considérer ces nombres comme identiques, et cette remarque présentera de l'intérêt si on la rapproche de cette autre, que l'azote et l'oxyde de carbone ont tous deux la même densité.

Mélange d'hydrogène et d'oxygène. — L'analyse du mélange d'hydrogène et d'oxygène a été faite par l'étincelle électrique quand on était dans les limites de combustibilité; dans les autres cas, en absorbant l'oxygène par l'acide pyrogallique et la potasse. Quelques analyses ont été faites par les deux procédés simultanément.

Les expériences ont été faites entre 16°, 5 et 18°, 5. Comme elles ont

été très-nombreuses, je transcris seulement celles qui se rapprochent le plus de la température de 17°,5.

Composition du mélange.	Pression observée.	Pression calculée.	Différence.
x	y		
	mm	mm	mm
0,000	732	732	0
0,244	768	768	0
0,374	801	798	+ 3
0,416	802	811	− 9
0,477	835	834	+ 1
0,619	930	915	+ 15
0,820	1252	1243	+ 9

Les nombres de la troisième colonne sont calculés par la formule

$$y(1-x) + 620\,x - 732 = 0,$$

qui représente encore une hyperbole O_3A_3 et qui conduit, pour les pressions de l'oxygène dans le mélange, à l'expression

$$y = -620x + 732,$$

équation d'une ligne droite O_3B_3 dont le coefficient angulaire est −620, beaucoup plus grand que celui que nous avons trouvé pour l'azote et l'oxyde de carbone.

Mélange d'acide carbonique et d'oxygène. — La remarque à laquelle ont donné lieu l'azote et l'oxyde de carbone rendait intéressantes les expériences faites avec deux autres gaz ayant la même densité. L'acide carbonique et le protoxyde d'azote se présentaient naturellement.

Pour doser les mélanges d'oxygène et d'acide carbonique, on absorbait l'acide carbonique par la potasse; puis, comme vérification, on ajoutait parfois de l'acide pyrogallique pour absorber à son tour l'oxygène.

Voici les résultats d'une série d'expériences faites à la température de 12 degrés.

Composition du mélange. x	Pression observée. y	Pression calculée.	Différence.
	mm	mm	mm
0,000	510	510	0
0,130	512	517	− 5
0,400	526	543	+ 17
0,470	555	560	− 5
0,615	600	592	+ 8
0,670	615	624	− 9
0,700	637	630	+ 7
0,760	663	668	− 5

Les nombres de la troisième colonne sont les ordonnées de l'hyperbole O_4A_4, ayant pour équation

$$y(1-x) + 460x - 510 = 0.$$

Les pressions de l'oxygène dans le mélange sont représentées par la droite O_4B_4, dont l'équation est

$$y = -460x + 510,$$

et le coefficient angulaire −460.

Mélange de protoxyde d'azote et d'oxygène. — L'analyse du mélange était faite en absorbant l'oxygène par l'acide pyrogallique et la potasse; dans un cas, on a analysé le résidu en le faisant détoner avec l'hydrogène et l'on a trouvé un résultat concordant.

Les expériences ont été faites à la température de 14 degrés.

Composition du mélange. x	Pression observée. y	Pression calculée.	Différence.
	mm	mm	mm
0,000	580	580	0
0,300	660	646	+ 14
0,450	705	707	− 2
0,690	972	930	+ 42
0,900	1785	1975	− 190

Les nombres de la troisième colonne correspondent à l'hyperbole O_5A_5, ayant pour équation

$$y(1-x) + 425x - 580 = 0.$$

L'accord n'est pas aussi complet que précédemment; mais les expériences ont été aussi moins nombreuses.

La pression de l'oxygène dans le mélange sera représentée par la droite $O_5 B_5$, dont l'équation est

$$y = -425x + 480,$$

et le coefficient angulaire — 425. Nous avons trouvé pour l'acide carbonique — 460. Sans doute ces deux nombres ne diffèrent pas beaucoup l'un de l'autre; mais, comme le résultat obtenu avec l'hydrogène en particulier n'indique pas que ces coefficients suivent l'ordre des densités, il n'y a pas lieu d'insister sur la remarque à laquelle avaient conduit les deux premiers.

Pour être complétement fixé à cet égard, j'avais pensé à expérimenter sur un gaz de grande densité, et j'avais choisi le cyanogène, mais toutes les tentatives que j'ai faites pour opérer avec ce gaz ont été infructueuses; outre que les appareils se salissent d'une façon désespérante, la phosphorescence est toujours tellement faible qu'il m'a été impossible de saisir, comme avec les autres gaz, le moment où elle s'établissait.

Il y aurait maintenant, pour compléter ce travail, à déterminer l'influence des gaz ou des vapeurs qui agissent chimiquement sur le phosphore. Tous ces corps apportent un obstacle plus ou moins grand à la phosphorescence; leur nombre est d'ailleurs très-grand, comme je l'ai déjà indiqué. Le Mémoire de Graham contient un grand nombre de faits et des expériences intéressantes, en particulier, sur l'action de l'hydrogène bicarboné; mais l'esprit se perd au milieu de cette nomenclature de corps d'origine et de propriétés si différentes, et s'épuise en vain à chercher un fil conducteur qui lui permette de se retrouver au milieu de ce dédale. J'ai fait de nombreuses expériences sur ce sujet, mais ce fil je ne suis point encore parvenu à le saisir. Je ne pense pas, du reste, que tous ces corps agissent de la même manière. Beaucoup se combinent évidemment avec le phosphore; d'autres, comme l'éther, les alcools, le sulfure de carbone, l'essence de térébenthine sont des dissolvants du phosphore. Quand on plonge un bâton de phosphore dans un flacon saturé de la vapeur d'un de ces corps, une couche de liquide se condense immédiatement à la surface. Si on le retire au bout de quelques instants et qu'on l'examine dans l'obscurité, on constate que la couche liquide s'évapore, et sitôt qu'un des points est à découvert la phosphorescence

se déclare dans le voisinage de ce point. La couche liquide persiste au contraire dans un espace saturé de vapeur, et elle reste la même quelle que soit la pression des gaz étrangers qui s'y trouvent. Le phosphore émet toujours de la vapeur; mais cette vapeur a une force élastique moindre que celle qu'elle aurait dans le vide ou dans un gaz inerte; elle est dans le même état que la vapeur d'eau en présence d'une dissolution concentrée de sel ou d'acide sulfurique; son état hygrométrique, si je puis m'exprimer ainsi, s'éloigne plus ou moins de l'unité. La tension du phosphore n'étant plus la même, il faut changer aussi celle de l'oxygène pour rester dans les limites de combustibilité et la réduire dans le même rapport; et l'expérience montre, en effet, qu'il suffit d'abaisser la pression pour faire reparaître la phosphorescence.

Aussi, si l'on suspend un bâton de phosphore dans un ballon au fond duquel on a versé assez d'essence de térébenthine pour que l'espace en reste saturé, la phosphorescence apparaît dans l'air quand la pression n'est plus que de quelques centimètres.

Mais, encore une fois, mes études sur ce point ne sont pas encore assez avancées pour que je puisse me prononcer d'une manière définitive et classer les corps qui agissent sur la phosphorescence, en rendant un compte exact du rôle que joue chacun d'eux. Pour quelques-uns, la portée de ces études dépasserait beaucoup l'objet particulier qu'on a ici en vue. Tout le monde sait que le gaz oléfiant, par exemple, qui nuit si énergiquement à la phosphorescence, met aussi obstacle à la combustion de l'hydrogène dans l'eudiomètre ([1]); qu'il empêche le potassium de s'oxyder dans l'air ([2]), etc. D'un autre côté, on se heurte à chaque instant, dans ces recherches, à la question de l'ozone qui, par elle-même, n'est point de nature à apporter beaucoup d'éclaircissements.

Ces éclaircissements, peut-être serai-je assez heureux pour les fournir un jour; ils formeraient le complément naturel et nécessaire du présent travail; mais j'espère que l'on voudra bien m'excuser de n'avoir pas attendu ce complément.

([1]) H. Davy, *Recherches sur la flamme* (*Ann. de Chimie et de Phys.*, 2e série, t. IV, p. 817.

([2]) Graham, *Observations sur l'oxydation du phosphore* (*Quart. Journal*, n° 11. — *Ann. Pogg.*, t. XVII, p. 375; 1829).

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

D'ÉLECTRICITÉ STATIQUE.

PAR M. ALFRED ANGOT,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, PRÉPARATEUR DE PHYSIQUE AU COLLÉGE DE FRANCE.

INTRODUCTION.

L'objet premier de ce travail était l'étude des phénomènes électrostatiques qui se présentent aux deux pôles d'une pile complétement isolée. Cette étude pouvait offrir quelque intérêt par ce fait que la théorie donnée par Biot, et qui n'avait encore été contrôlée par aucune expérience, se trouve maintenant en désaccord avec une théorie nouvelle, basée sur les principes que l'emploi du potentiel a introduits dans l'étude de l'électricité.

Mais, dans ce nouveau genre d'études, les travaux mathématiques ont précédé de beaucoup les recherches expérimentales, dont le nombre est très-restreint. Il m'a donc fallu, avant de pouvoir aborder le sujet principal, traiter un certain nombre de questions accessoires indispensables, ce qui m'a forcé à remettre à un second travail l'étude de la pile et à me borner pour le moment aux recherches expérimentales préliminaires.

Comme les idées qui m'ont guidé sont peu répandues en France, au moins dans l'enseignement, je crois utile de rappeler tout d'abord quelques définitions indispensables pour l'intelligence de ce qui doit suivre.

1° *Quantité d'électricité.* — Si l'on électrise simultanément deux sphères conductrices isolées et égales, puis qu'on vienne à les séparer, comme rien ne peut distinguer l'une de l'autre, elles posséderont des

quantités égales d'électricité. De plus, si l'on vient à réunir sur l'une des sphères toute l'électricité qui se trouvait sur les deux, cette sphère possédera une quantité d'électricité double de la précédente. On peut donc parler de *quantités d'électricité* comme de *quantités de chaleur*, et cela quelles que soient les hypothèses que l'on adopte pour se rendre compte des phénomènes électriques ou calorifiques.

En vertu des lois de Coulomb, la force qui s'exerce entre deux éléments électrisés est proportionnelle aux quantités d'électricité qu'ils possèdent, et en raison inverse du carré de leur distance. On prendra donc comme unité de quantité d'électricité la quantité qui, concentrée en un point, et agissant sur une quantité égale concentrée en un autre point situé à une distance égale à l'unité, exercera sur ce point une action égale à l'unité de force.

Quant à l'unité de force, elle dépend des unités de masse, de longueur et de temps. Pour la première et la dernière il n'y a guère de difficulté, et l'on est généralement convenu de prendre pour unité de temps la seconde, et pour unité de masse celle du gramme, ou, plus exactement, celle de 1 centimètre cube d'eau distillée à la température de son maximum de densité.

Pour l'unité de longueur, il y a plus de divergence dans les opinions : nous adopterons l'unité choisie par le comité de l'Association britannique, le centimètre, de sorte que l'unité de force sera la force qui, agissant sur 1 gramme de matière pendant une seconde, lui imprimera une accélération de 1 centimètre par seconde. Avec ces unités, le poids de 1 gramme à Paris vaut 980,88 unités de force.

2° *Densité et épaisseur électriques*. — L'électricité ne se manifestant qu'à la surface des corps conducteurs, on a été conduit à la représenter par une couche qui les recouvrirait ; comme la distribution ne se fait pas d'une manière uniforme sur toute la surface, cette couche peut avoir soit une épaisseur constante et une *densité* variable, soit une densité constante et une *épaisseur* variable. De là les mots de *densité* et d'*épaisseur électriques* en un point, mots qui ont même signification et sont employés indifféremment pour désigner le rapport de la quantité d'électricité qui existe sur une surface à cette surface elle-même, quand ses dimensions sont telles que l'électricité puisse y être considérée comme distribuée uniformément.

Potentiel. — Si l'on considère un point M soumis à l'influence de masses électriques m, m', m'',... concentrées en des points situés respectivement à des distances r, r', r'',... du point M, on appelle *potentiel* des masses électriques sur le point M l'expression

$$V = \sum \frac{m}{r}.$$

Cette fonction, purement mathématique à l'origine, a été employée pour la première fois par Laplace, mais surtout par Gauss, qui lui a donné son nom. Plus tard, entre les mains de Green, de Clausius et de Thomson, elle a servi à établir toute la théorie de l'électricité.

Ce n'est pas ici le lieu d'insister sur ses différentes propriétés, qui ont, du reste, été exposées plusieurs fois d'une façon simple et élémentaire (1). Il me suffit de rappeler les points suivants.

Quand un corps conducteur électrisé est en équilibre, le potentiel de toute l'électricité qu'il possède est constant sur un point quelconque de son intérieur. Ce potentiel se nomme alors, pour abréger, *potentiel du corps :* il est proportionnel à la quantité totale de l'électricité (2); on peut donc poser

$$V = \frac{M}{E}, \tag{1}$$

E étant une constante qui dépend de la forme du corps.

---

(1) Voir, *Journal de Physique*, t. I (1872), les articles de M. Cornu, p. 7, 87, 241, et de M. Potier, p. 145 et 217.

(2) En effet, considérons une série de points faisant partie d'un même corps conducteur, possédant des masses électriques m, m', m'',..., et situés à des distances r, r', r'',... d'un point P. Le potentiel des masses électriques sur le point P sera

$$V = \frac{m}{r} + \frac{m'}{r} + \ldots.$$

Si l'on change la quantité totale d'électricité du corps, qu'on la rende, par exemple, K fois plus grande; comme sur un même corps la distribution électrique se fait toujours de la même façon, les masses électriques des différents points seront devenues respectivement Km, Km', Km'',..., et le nouveau potentiel des masses électriques au point P sera

$$V' = \frac{Km}{r} + \frac{Km'}{r'} + \ldots = KV.$$

Le potentiel est donc bien proportionnel à la quantité totale d'électricité que possède le corps.

Si le corps est une sphère de rayon R, possédant une quantité d'électricité M, son potentiel au centre, et par suite dans tout l'intérieur est $V = \frac{M}{R}$; il est égal à 1 pour $M = 1$ et $R = 1$. Nous prendrons donc pour unité de potentiel le potentiel d'une sphère d'un rayon égal à l'unité, et chargée d'une quantité d'électricité égale à l'unité.

Capacité électrique. — Considérons maintenant un corps conducteur chauffé et en équilibre de température; pour élever sa température de T degrés, il faut lui donner une quantité de chaleur Q, et l'on a

$$T = \frac{Q}{C}, \tag{2}$$

C étant la capacité calorifique du corps.

On voit que l'équation d'équilibre électrique (1) a une grande ressemblance avec celle d'équilibre calorifique (2), ce qui a fait donner à la constante E le nom de *capacité électrique du corps*. C'est la quantité d'électricité nécessaire pour faire acquérir au corps un potentiel égal à l'unité, de même que la capacité calorifique est la quantité de chaleur nécessaire pour échauffer le corps de 1 degré.

La seule différence qu'il ne faut pas oublier de signaler est que, pour des corps semblables, la capacité calorifique croît comme le cube des dimensions homologues, tandis que la capacité électrique est simplement proportionnelle à ces dimensions. En effet, si les deux corps sont semblables et possèdent des couches électriques distribuées semblablement, les quantités d'électricité qu'ils possèdent sont proportionnelles au cube des dimensions homologues : donc le potentiel $V = \sum \frac{m}{r}$ est proportionnel au carré de ces mêmes dimensions, et par suite la capacité $E = \frac{M}{V}$ varie comme le rapport de similitude.

Comme pour une sphère on a $V = \frac{R}{M}$, la capacité d'une sphère est exprimée par le même nombre que son rayon, quelles que soient les unités adoptées. L'unité de capacité sera donc pour nous la capacité d'une sphère de 1 centimètre de rayon.

L'analogie que nous avons signalée plus haut entre les mots *quantité de chaleur* et *quantité d'électricité*, *température* et *potentiel*, *capacité*

calorifique et *capacité électrique*, se poursuit beaucoup plus loin, ainsi que l'a montré Sir W. Thomson. Tous les problèmes d'équilibre électrique peuvent se traiter absolument par les mêmes équations que ceux d'équilibre calorifique et de calorimétrie. Il me suffit de citer l'exemple suivant :

Deux corps de capacités électriques c et c', aux potentiels v et v', sont mis en communication par un long fil. Ils arrivent à un potentiel final V.

La quantité d'électricité perdue par le premier est $(v - V)c$, celle gagnée par le second est $(V - v')c'$; on a donc

$$(V - v')c' = (v - V)c,$$

d'où

$$V = \frac{vc + v'c'}{c + c'}.$$

Mais le premier corps possédait une quantité d'électricité $m = cv$; le second, $m' = c'v'$; donc

$$V = \frac{m + m'}{c + c'}.$$

Deux corps de capacités calorifiques c et c', aux températures t et t', sont mis en contact, ou mieux mélangés. Ils arrivent à une température finale T.

La quantité de chaleur perdue par le premier est $(t - T)c$, celle gagnée par le second est $(T - t')c'$; on a donc

$$(T - t')c' = (t - T)c,$$

d'où

$$T = \frac{tc + t'c'}{c + c'}.$$

Mais le premier corps possédait une quantité de chaleur $q = ct$; le second, $q' = c't'$; donc

$$T = \frac{q + q'}{c + c'}.$$

Ce mode de raisonnement, d'une clarté et d'une simplicité remarquables, est dû à Thomson (¹). C'est lui que nous emploierons exclusivement par la suite, car il facilite singulièrement l'étude de l'électricité.

Tension. — Le mot de *tension*, fort usité d'habitude en électricité, nous a paru d'un emploi dangereux. Ce mot, en effet, est employé au moins dans trois sens absolument différents, sans que, le plus souvent, on prenne la peine de le définir.

Dans son sens le plus habituel en électricité statique, il est synonyme de densité électrique, mot qui est meilleur que celui de tension, et qui doit certainement lui être préféré.

Souvent il sert à désigner la pression que l'électricité accumulée en un point exerce sur la couche d'air en contact qui s'oppose à son départ; dans cette acception, il désigne une quantité proportionnelle au

(¹) *Voir* THOMSON, *Reprint of Papers on Electrostatics. On the uniform motion of heat*, p. 1; *On the electrostatical Capacity of a Leyden phial*, etc., p. 51.

carré de la densité, et si l'on veut conserver le mot *tension*, c'est dans ce sens seul qu'il faudrait le faire.

Enfin, quand il est question de piles, le mot *tension* se prend souvent pour désigner leur force électromotrice; il est alors absolument synonyme de *potentiel*.

Pour ces causes, nous rejetons absolument dans tout ce qui suit le mot *tension*, et nous ne nous servirons que des mots *quantité d'électricité*, *potentiel* et *densité*, mots qui n'ont jamais été employés que dans une seule acception, et dont le sens parfaitement défini ne peut donner lieu à aucune ambiguïté.

I. — *Méthode d'observation. Appareil de mesure.*

1. *Construction et usage de l'électromètre.* — L'instrument qui a servi à toutes mes recherches est une forme simplifiée de l'électromètre à quadrants de M. Thomson (1), proposée et employée par M. Branly (2).

Il se compose de quatre quadrants A, B, A', B', disposés dans un même plan horizontal, au-dessus desquels se meut une aiguille de métal en forme de 8, suspendue à un fil d'argent. Au-dessous, l'aiguille se prolonge par une petite tige verticale portant un miroir qui servira à mesurer les déviations par la méthode de la réflexion. Le tout est renfermé dans une cage carrée en glaces, surmontée, à la manière des balances de Coulomb, d'une cheminée en verre, sur laquelle vient s'adapter le tambour qui porte la pince du fil de torsion. Cette pince est elle-même terminée par une vis qui permet de la relever ou de l'abaisser, de façon à faire varier à volonté la distance de l'aiguille aux secteurs.

Pour les expériences, on réunit les secteurs deux à deux en diagonale, de manière à en former deux paires qu'on électrise de signes contraires, et dont les actions sur l'aiguille sont alors concordantes.

On peut se servir de cet appareil de deux façons différentes :

1° On donne à l'aiguille une charge constante, et l'on fait commu-

---

(1) THOMSON, *Reprint of Papers of Electrostatics*, p. 260.

(2) BRANLY, *Annales de l'École Normale* (1873), p. 209.

niquer les deux paires de secteurs avec deux corps dont on veut mesurer la différence de potentiel : c'est ainsi qu'a opéré M. Branly, et qu'on se sert habituellement de l'électromètre de Thomson. Ce procédé est, du reste, particulièrement commode quand on étudie des sources

Fig. 1.

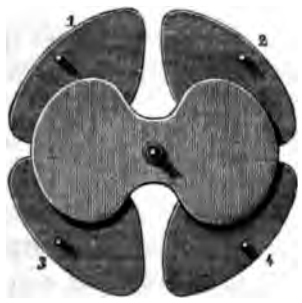
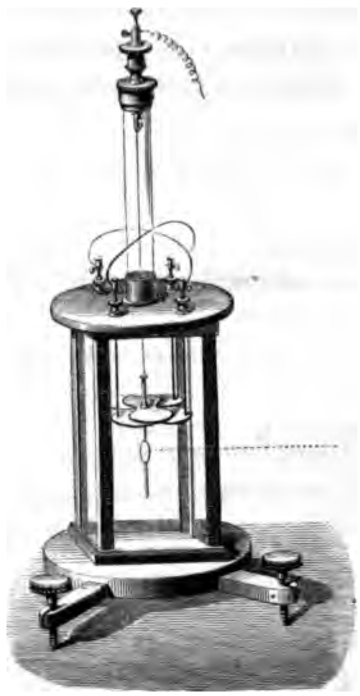


Fig. 2.



d'électricité, c'est-à-dire des corps comme la pile, qui jouissent de la propriété de maintenir entre deux de leurs points une différence de potentiel constante.

2° On peut donner des charges permanentes, égales et de signes contraires, aux deux paires de secteurs, et mettre l'aiguille en communication avec le corps qu'on étudie par l'intermédiaire du fil de torsion et d'un long fil de métal. Cette disposition est celle dont je me suis exclusivement servi, et c'est elle qu'il est le plus commode d'employer quand on veut étudier des corps conducteurs chargés d'une quantité limitée d'électricité. Elle permet de déterminer soit la charge du corps, soit sa capacité électrique, soit le potentiel auquel il se trouvait.

En effet, soient V le potentiel du corps, C sa capacité, E celle de l'électromètre. En mettant l'électromètre en communication lointaine avec le corps, le système prend un potentiel v, et l'on observe une déviation δ.

Le potentiel final étant v, l'électromètre a reçu une quantité d'électricité égale à Ev et proportionnelle à δ, tant que les déviations ne sont pas trop grandes, et comme nous le démontrerons plus loin. D'autre part, la quantité d'électricité perdue par le corps est $(V - v)C$; on a donc

$$(V - v)C = vE = K\delta, \quad \text{d'où} \quad K\delta = VE\frac{C}{E + C}.$$

Si maintenant on observe la déviation δ_0 de l'électromètre quand on le met en communication avec une source au potentiel V, on a

$$K\delta_0 = VE, \quad \text{d'où} \quad \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{C}{E + C},$$

équation d'où l'on peut déduire C ou la charge initiale du corps CV.

Il reste maintenant à donner quelques détails pratiques qui peuvent être utiles à ceux qui devront se servir de cet appareil ou d'autres analogues.

On mesure généralement les déviations par la méthode de la réflexion, en examinant avec une lunette les déplacements de l'image d'une règle divisée, placée à environ 2 mètres de l'appareil. L'image est renvoyée par un petit miroir plan suspendu à l'aiguille de l'électromètre.

Cette manière d'opérer présente de nombreux inconvénients.

Il est presque impossible d'obtenir un miroir suffisamment plan, surtout avec des dimensions aussi petites que celles qui conviennent à l'appareil; de plus, la lunette est toujours plus ou moins affectée d'astigmatisme; enfin l'image qu'on observe provient de rayons qui ont dû traverser deux fois la glace qui ferme la cage. Pour toutes ces causes, l'image est généralement assez confuse, et il est bien difficile de mettre au point en même temps les divisions de l'échelle et les numéros de ces divisions. On évitera tous ces inconvénients en substituant au miroir plan un miroir concave, et en plaçant la règle divisée au centre de courbure du miroir, un peu au-dessous de l'axe. On obtient

ainsi dans le même plan vertical, et un peu au-dessus de l'axe, une image réelle égale à l'objet, et qui est très-bonne, quand même le miroir serait un peu défectueux. On sait, en effet, qu'au centre de courbure on est dans la position du minimum d'aberration.

Comme règle divisée, on pourra prendre une échelle micrométrique au cinquième ou au dixième de millimètre, dont on observera l'image avec un microscope. La règle dont je me servais était au cinquième de millimètre, et on la regardait avec un microscope grossissant cinquante fois. Le cinquième de millimètre paraissait donc comme 1 centimètre à la distance de la vision distincte; on pointait le dixième de division; mais on voit qu'on aurait pu facilement le faire encore avec une règle au dixième de millimètre.

On pourra se construire facilement un micromètre de la manière suivante. On prend une lame de verre, dépolie d'un seul côté; on promène la face polie dans la flamme d'un appareil de Marsh, de façon à la recouvrir d'une légère couche d'arsenic. C'est sur cette couche, qui est d'une préparation et d'un maniement bien plus commodes qu'une couche d'argent, qu'on tracera la graduation à la machine à diviser. Après avoir inscrit les numéros, on recouvre l'arsenic de vernis photographique. On dispose alors derrière cette échelle un petit miroir à 45 degrés, qui y renvoie la lumière d'une lampe placée à distance, et produit sur la face dépolie un éclairement uniforme.

L'image se présente alors sous forme de traits brillants se détachant sur un fond noir, et, malgré l'emploi du microscope, elle est encore infiniment plus brillante que l'image qu'on obtient d'habitude avec une échelle sur papier et une lunette. Les observations sont, de la sorte, beaucoup plus faciles et moins fatigantes pour la vue, et comportent une précision plus grande dans les pointés.

Ajoutons que, si la glace qui forme l'appareil était défectueuse, ce qui pourrait troubler les images, il n'y aurait qu'à prendre un miroir concave dont le centre de courbure fût précisément sur la cage; c'est sur la partie intérieure de celle-ci qu'on appliquerait le micromètre, et l'image serait alors soustraite à toute influence perturbatrice.

Une cause de perte de temps dans l'emploi de l'électromètre, tel qu'il a été décrit, est la persistance des oscillations, due principalement à la forme même de l'aiguille, qui lui donne un grand moment

d'inertie. Ces oscillations sont de deux sortes : les unes horizontales, provenant de la torsion du fil qui se détord en oscillant autour de sa position d'équilibre; les autres se produisent toutes les fois qu'une trépidation ou un choc vient ébranler l'appareil : le fil et l'aiguille se mettent alors à osciller dans un plan vertical, comme un pendule. Il suffit du plus petit mouvement pour produire ces oscillations, et elles rendent toute mesure impossible pendant longtemps. On évitera cet ennui en fixant verticalement à l'aiguille, dans le prolongement de l'axe, une petite tige de verre portant une lame de platine qui va plonger dans de l'acide sulfurique. Cette disposition amortit beaucoup les oscillations horizontales, et détruit presque immédiatement les oscillations verticales. On vérifiera, du reste, que la présence de cette palette ne diminue en rien la précision des mesures, par ce fait que l'appareil revient toujours rigoureusement à son zéro.

La seule précaution à prendre est de faire plonger la palette de platine en entier dans l'acide sulfurique; si elle était coupée par le niveau de l'acide, il se formerait tout le long de la ligne de contact un grand ménisque qui changerait de forme pendant le mouvement et pourrait apporter des perturbations. La présence de l'acide sulfurique a, en outre, l'avantage de bien dessécher l'air de la cage, qu'il sera commode de munir d'une porte pour faciliter le renouvellement de l'acide.

Pour éviter l'influence que les corps voisins, électrisés ou non, pourraient exercer sur l'électromètre, il sera prudent d'entourer l'appareil d'écrans conducteurs en communication avec le sol.

Le dernier point utile à connaître est la manière d'obtenir une charge constante, soit sur les secteurs, soit sur l'aiguille. On a proposé les piles sèches, mais elles ne donnent pas de bons résultats. Elles sont trop influencées par les variations de température et d'humidité, et ont une conductibilité beaucoup trop faible; si par hasard on vient à y toucher, leur charge baisse brusquement et met un temps assez long à reprendre sa valeur initiale.

Il est beaucoup plus avantageux d'employer des piles de Volta, zinc, cuivre et eau, montées en couronne, dont l'usage paraît avoir été indiqué par Gassiot (¹), mais dont Hankel s'est le premier servi dans ses

(¹) GASSIOT, *Philosophical Transactions*, 1840 et 1844.

recherches sur l'électricité atmosphérique ([1]). Généralement, on constitue ces piles au moyen de petits vases de terre dont on noie la base dans de la gomme laque, afin d'avoir entre eux un isolement parfait; mais l'opération de la fusion de la gomme laque est longue et ne peut se faire que sur de très-petites quantités à la fois. On pourra la remplacer de la manière suivante. On commence par couler, sur la planche qui doit porter les pots, une légère couche de soufre, qui forme une base isolante solide sur laquelle on dispose en ordre tous les vases; puis on coule entre eux de la paraffine qui les fixe, tout en les isolant aussi bien que de la gomme laque. L'emploi de la paraffine présente un double avantage : tout d'abord, c'est un corps très-facile à manier, qui fond, suivant les échantillons, de 45 à 60 degrés, en devenant liquide comme de l'eau : c'est un très-bon isolant; enfin la paraffine est une substance grasse, sur laquelle l'eau ne s'étale pas, mais reste en globules qu'on peut enlever avec une pipette par simple aspiration, de sorte que les éléments de la pile restent parfaitement isolés, quand même en les montant on laisserait tomber un peu d'eau entre eux.

La dimension des éléments étant absolument indifférente, on peut la réduire autant qu'on voudra.

En employant de petits godets en terre contenant 4 grammes d'eau, une pile de 100 éléments forme un carré de 30 centimètres seulement de côté.

Enfin, pour éviter l'évaporation de l'eau des godets, on pourra verser à la surface une légère couche d'huile; on obtient de la sorte des éléments qui, une fois montés, peuvent servir presque indéfiniment. Mon électromètre fonctionnait avec deux piles montées par ce moyen, et formées chacune de 100 éléments, dont un des pôles communiquait avec le sol, et l'autre avec une des paires de secteurs. Ces piles ont été en usage pendant cinq mois entiers sans qu'il ait été nécessaire d'y toucher une seule fois.

On pourra, si l'on veut réduire le nombre des couples, en augmenter la force électromotrice en prenant, par exemple, des couples zinc-platine au lieu des couples zinc-cuivre, et en amalgamant le zinc.

([1]) HANKEL, *Poggendorff's Annalen*, t. LXXXIV (1851) et LXXXVIII (1853).

La force électromotrice de l'élément zinc-cuivre-eau filtrée étant.	1
Celle de l'élément zinc amalgamé cuivre-eau est................	1,11
» zinc ordinaire platine-eau est................	1,17
» zinc amalgamé platine-eau est.............	1,28

Ces nombres ont été obtenus très-simplement au moyen de l'électromètre lui-même, en formant une pile d'un certain nombre de couples, dix ou vingt, dont on fait communiquer un des pôles avec le sol, l'autre avec l'aiguille de l'électromètre. Le rapport des déviations produites par deux piles différentes est celui de leurs forces électromotrices.

2. *Graduation et vérification de l'électromètre.* — La première opération à faire avant de se servir de l'électromètre est de le régler de façon que, sans torsion, l'aiguille se tienne en équilibre sous l'action des secteurs chargés. Ce réglage n'est pas nécessaire quand on n'étudie que des sources d'électricité, mais devient indispensable quand on opère avec des corps chargés d'une quantité limitée d'électricité. Pour régler l'appareil, il suffit de faire communiquer avec le sol toutes les pièces, aiguille et secteurs, et d'observer la position d'équilibre de l'aiguille; cette position ne doit pas changer quand on chargera les secteurs avec leurs piles, l'aiguille restant reliée au sol. Après quelques tâtonnements, on réalisera cette condition en tournant le tambour supérieur qui porte le fil. Dans ces conditions, l'équilibre de l'aiguille ne doit pas non plus être troublé quand elle aura été isolée quelque temps, puis qu'on viendra à la faire communiquer avec le sol.

Quand le fonctionnement de l'électromètre est régulier, on peut vérifier les propositions suivantes :

1° *Les déviations de l'électromètre sont proportionnelles, jusqu'à une certaine limite, aux quantités d'électricité que possède l'aiguille.*

Cette proposition a déjà été démontrée par M. Branly (¹), et je l'ai vérifiée moi-même afin de savoir jusqu'à quelle limite je pouvais compter sur la proportionnalité. Le moyen le plus simple pour la déterminer est le suivant. On a démontré à plusieurs reprises, et je reviendrai sur ce fait, que, dans une pile dont les éléments sont soigneusement isolés et

(¹) Branly, *loc. cit.*, p. 221.

dont un des pôles communique avec le sol, le potentiel de l'autre est proportionnel au nombre des éléments. Si donc on vient à mettre l'aiguille de l'électromètre en relation avec un nombre variable d'éléments d'une semblable pile, le quotient de la déviation par le nombre d'éléments doit être constant; au moment où il cessera de l'être, on aura atteint la limite de la proportionnalité.

J'ai ainsi obtenu, par exemple, les nombres suivants, pour des jours différents et en variant la sensibilité :

n (nombre d'éléments).	δ (déviation).	$\frac{\delta}{n}$	n	δ	$\frac{\delta}{n}$
20	42,0	2,10	20	30,4	1,520
40	83,7	2,09	40	60,9	1,522

n	δ	$\frac{\delta}{n}$
20	30,4	1,520
40	60,9	1,522
60	91,2	1,520
80	122,6	1,532
100	154,1	1,541

De ces nombres il résulte que l'on peut compter sur la proportionnalité tant que les déviations sont inférieures à 100, ce qui correspond à un angle de $3^\circ 20' 42''$ (¹). Je n'ai jamais dépassé et n'ai même atteint qu'exceptionnellement des déviations de 80 divisions ($2^\circ 40' 48''$); j'étais donc toujours absolument certain de me trouver dans les limites de proportionnalité.

2° *Le potentiel au pôle isolé d'une pile dont l'autre pôle communique avec le sol est absolument indépendant de la forme et des dimensions de ce pôle.*

(¹) L'échelle était divisée en cinquièmes de millimètre, et placée à une distance de $170^{mm},5$ du miroir. L'angle α, correspondant à une déviation de 100 divisions, était donc donné par la formule

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{100}{5}}{170,5}, \quad \text{d'où} \quad \alpha = 3^\circ 20' 42'';$$

pour 80 divisions de déviation on aurait un angle de $2^\circ 40' 48''$.

Ce fait, sur lequel on a besoin de s'appuyer constamment et qui est une conséquence de la théorie du potentiel, se vérifie avec la plus grande facilité : il suffit de mettre l'aiguille de l'électromètre en communication avec un quelconque des éléments de la pile, et d'observer la position d'équilibre. Si l'on réunit le pôle isolé à un conducteur de grandes dimensions, par exemple à un condensateur à grande surface, la position d'équilibre n'est pas changée. Si l'électromètre est en relation avec l'élément même que l'on réunit au condensateur, la déviation diminue quelquefois un peu au moment du contact, mais reprend rigoureusement sa valeur première. La diminution primitive n'a même pas lieu si la pile est formée de substances très-conductrices.

3° *Quand on met un corps conducteur électrisé en communication lointaine avec l'électromètre, la déviation de ce dernier est proportionnelle à la charge du corps.*

Cette proposition résulte de la loi de partage d'électricité entre deux corps conducteurs, dont les formules ont été données plus haut. Il m'a paru bon cependant de la vérifier par expérience.

Pour cela, j'ai employé un condensateur à plateaux, provenant d'un électroscope condensateur de Volta. Le plateau condensateur était mis en communication permanente avec le sol; le plateau collecteur pouvait être mis en relation avec un nombre variable d'éléments d'une pile de Volta, puis avec l'électromètre : on a toujours observé la proportionnalité entre les déviations et le nombre d'éléments employés.

Cette proportionnalité subsistait quand, le condensateur étant chargé, on séparait les plateaux, puis qu'on mettait le collecteur en communication avec l'électromètre. On a ainsi observé les nombres suivants :

n (nombre d'éléments).	δ (déviation).	$\frac{\delta}{n}$.
2	19,7	9,85
4	39,5	9,87
6	59,8	9,83
8	78,5	9,81
10	96,5	9,65
12	110,5	9,21

Le quotient $\frac{\delta}{n}$ est d'abord constant, puis baisse un peu, ce qui tient à deux causes : d'abord, dans les dernières expériences, on a dépassé la limite de proportionnalité; de plus, lorsqu'on sépare les deux armatures du condensateur, le collecteur prend un potentiel beaucoup plus élevé (¹) : par suite, la perte d'électricité doit être beaucoup plus rapide, ce qui diminue δ.

Avant d'appliquer l'électromètre à la mesure de la capacité électrique d'un cylindre et à l'étude de la pile isolée, il était nécessaire d'en déterminer la capacité; mais il s'est rencontré dans cette recherche des difficultés dues uniquement à des phénomènes d'influence, et qui m'ont forcé à effectuer cette mesure de plusieurs façons et à lui donner plus d'importance qu'elle ne devait tout d'abord en avoir.

(¹) En effet, soient V le potentiel primitif du collecteur faisant partie du condensateur; C sa capacité dans les mêmes circonstances; C′ la capacité du collecteur isolé, et V′ son potentiel. La quantité Q d'électricité que possède le collecteur ne changeant pas pendant l'expérience, on a

$$Q = VC = V'C', \quad \text{d'où} \quad V' = V\frac{C}{C'},$$

nombre beaucoup plus grand que V, car $\frac{C}{C'}$ représente le pouvoir condensant du condensateur. En effet, le collecteur seul, de capacité C′, en communication avec une source à potentiel constant V, prend une charge M′ telle que l'on ait $M' = VC'$. Le même collecteur, faisant cette fois partie du condensateur, possède une capacité C. En relation avec la même source, il se charge d'une quantité M d'électricité au potentiel V, et l'on a $M = VC$. On en déduit

$$V = \frac{M}{C} = \frac{M'}{C'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{M}{M'} = \frac{C}{C'};$$

$\frac{C}{C'}$ représente donc bien le pouvoir condensant.

Cette propriété m'a permis d'obtenir une étincelle dans l'air avec une pile de 40 éléments de Volta zinc-cuivre-eau ordinaire. Il suffisait de mettre ces 40 éléments en relation avec le condensateur à plateaux, puis d'éloigner le collecteur et d'en approcher le doigt pour en tirer une étincelle.

C'est, je crois, la première fois qu'on observe une étincelle provenant d'une source électrique aussi faible.

II. — *Capacité électrique d'une sphère, de deux sphères en contact et d'un condensateur sphérique. Mesure de la capacité de l'électromètre.*

3. La capacité d'une sphère est représentée par le même nombre que son rayon, comme nous l'avons vu plus haut. Le moyen qui paraît le plus simple pour déterminer la capacité E de l'électromètre est alors le suivant.

On le met d'abord en relation avec une pile qui lui donne un potentiel V, et lui imprime une déviation δ_0. On a alors

$$K\delta_0 = EV.$$

Puis on charge une sphère de capacité S avec la même pile, et on la met ensuite en communication lointaine avec l'électromètre ramené au zéro. On observe une seconde déviation δ_1, et, d'après les équations de partage électrique que nous avons établies plus haut, on a

$$K\delta_1 = EV\frac{S}{S+E},$$

d'où

$$\frac{\delta_0}{\delta_1} = \frac{S+E}{S}, \quad E = S\frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_1}.$$

La seule difficulté, et elle est capitale, est que, par suite de l'influence qu'exercent sur la sphère les corps environnants, sa capacité réelle est toujours plus grande que son rayon, sans que l'on puisse évaluer la différence, qui n'est négligeable *dans aucun cas*.

Pour le démontrer, il suffira de considérer le cas de deux sphères concentriques : la sphère intérieure, de rayon R, sera en communication avec une source à potentiel V; la sphère extérieure, de rayon R', sera en communication avec le sol. Dans ces conditions, la sphère intérieure prend une quantité d'électricité + M, et, comme on est dans le cas d'un condensateur fermé, la sphère extérieure possède une quantité d'électricité égale et de signe contraire — M. Le potentiel au centre est donc

$$V = \frac{M}{R} - \frac{M}{R'} = M\frac{R'-R}{RR'},$$

c'est-à-dire que la capacité de la sphère intérieure est maintenant $\frac{RR'}{R'-R}$ au lieu de R.

Supposons une sphère de 10 centimètres de rayon placée au milieu d'une salle de 10 mètres de côté, dimension qui n'est certainement jamais réalisée dans aucun laboratoire, on aura alors $R' = 500$, $R = 10$; la capacité de la sphère sera donc $R \times \frac{50}{49}$; elle est donc accrue d'environ $\frac{1}{50}$ de sa valeur par l'influence seule des murailles de la pièce. En supposant une salle de 4 mètres de côté, on aurait une erreur de $\frac{1}{20}$.

Dans cette évaluation n'entrent pas tous les objets contenus dans la pièce, et qui exercent sur la sphère une action d'autant plus grande qu'ils en sont plus rapprochés, de sorte qu'on peut être certain que la capacité de la sphère se trouve altérée d'au moins $\frac{1}{20}$ de sa valeur.

Il serait inutile, d'autre part, de chercher à atténuer l'erreur en se servant de très-petites sphères, car, en vertu de sa forme même, l'électromètre agit comme condensateur et possède une capacité assez grande, qui ne pourra être déterminée avec précision qu'autant qu'on lui comparera des corps dont la capacité ne sera pas relativement trop petite.

Cette influence est une cause d'erreur dont on ne s'est jamais, je crois, assez préoccupé dans les expériences d'électricité statique. J'ai cherché à l'atténuer autant que possible en suspendant les sphères au moyen de longs fils de soie à une traverse qui passait au milieu de la salle, aussi loin que possible de tous les corps étrangers; mais l'erreur subsiste toujours, ainsi qu'on le verra par les nombres suivants, résultats de mes premiers essais de détermination de la capacité de l'électromètre.

J'ai expérimenté successivement avec trois sphères dont les rayons étaient $12^c,5$, $10^c,6$ et $5^c,3$.

Les deux premières colonnes des tableaux suivants donnent les valeurs de δ_0 [1] et de δ_1 définies plus haut; la troisième contient les

---

[1] Dans la colonne qui donne les valeurs de δ_0, on remarquera des nombres qui dépassent de beaucoup la limite de proportionnalité de l'appareil; mais ce ne sont pas les nombres directs de l'expérience : on chargeait toujours les sphères en les mettant en communication

valeurs calculées de $\frac{S}{E} = \frac{\delta_1}{\delta_0 - \delta_1}$; enfin la dernière donne la valeur de S obtenue en prenant $E = 43,2$, valeur déterminée en toute rigueur par un autre procédé qui sera exposé plus loin.

En comparant les valeurs de S avec le rayon correspondant qui mesure la capacité propre de la sphère, on aura une idée de l'effet de l'influence.

Sphère de rayon $12^c,5$.

δ_0	δ_1	$\frac{\delta_1}{\delta_0-\delta_1}$	S
97,4	23,9	0,325	14,0
95,3	23,4	0,325	14,0
99,6	24,1	0,319	13,8
99,3	24,6	0,330	14,2
98,9	24,4	0,328	14,1
156,5	38,6	0,327	14,1
100,3	25,3	0,337	14,5
209,0	56,2	0,367	15,8

Sphère de rayon $10^c,6$.

δ_0	δ_1	$\frac{\delta_1}{\delta_0-\delta_1}$	S
163,0	34,4	0,268	11,6
150,0	31,9	0,270	11,6
152,5	32,5	0,271	11,7
171,9	36,9	0,273	11,8
171,9	37,0	0,274	11,8
100,8	22,0	0,279	12,0
100,3	23,4	0,304	13,1
207,3	52,6	0,340	14,7

Sphère de rayon $5^c,3$.

δ_0	δ_1	$\frac{\delta_1}{\delta_0-\delta_1}$	S	δ_0	δ_1	$\frac{\delta_1}{\delta_0-\delta_1}$	S
97,7	11,0	0,127	5,48	156,2	17,8	0,128	5,53
100,7	11,3	0,126	5,44	82,5	9,6	0,132	5,70
97,7	11,1	0,128	5,53	69,1	8,2	0,135	5,83
96,0	10,5	0,123	5,31	156,5	19,2	0,140	6,05

Les premiers nombres donnés dans chacune de ces séries sont tous bien concordants; ils ont été obtenus en prenant les précautions indiquées pour diminuer l'influence extérieure. A la fin de chaque colonne on a mis, au contraire, les résultats d'expériences faites dans le but de montrer combien la part de l'influence peut être grande. Dans

---

avec une pile de 100 éléments; mais comme la même pile, réunie directement à l'électromètre, aurait donné une déviation trop forte, on ne prenait dans ce cas que 40 ou 60 éléments de la pile, de façon à avoir toujours des déviations inférieures à 100. On en déduisait ensuite, par la règle de proportionnalité, la déviation δ_0 à inscrire dans le tableau, et qu'on aurait observée en reliant directement l'électromètre à la pile de 100 éléments, si la proportionnalité avait subsisté aussi loin.

ces dernières expériences, les sphères étaient portées par trois pieds de verre d'environ 30 centimètres, terminés par un petit bâton de cire d'Espagne. L'expérience révèle immédiatement l'influence exercée par la table sur laquelle reposaient les pieds. On a même outré ces effets en approchant des conducteurs isolés à 30 ou 40 centimètres de la sphère; l'influence a pu, dans ces derniers cas, augmenter la capacité de la sphère de $\frac{1}{7}$, et même avec la seconde sphère de $\frac{1}{6}$ de sa valeur.

Il était donc impossible de déterminer directement par ce moyen la capacité de l'électromètre. On peut cependant se servir des expériences précédentes de la manière suivante : on construit une courbe ayant pour abscisses les valeurs des rayons des sphères, et pour ordonnées les valeurs de la capacité de l'électromètre, déduite du rapport expérimental $\frac{S}{E} = \frac{\delta_1}{\delta_0 - \delta_1}$, dans lequel on prend pour valeur de S sa vraie valeur, celle du rayon de la sphère. On a ainsi pour E des nombres d'autant plus inexacts que l'influence est plus grande, c'est-à-dire que R est plus grand. Mais l'erreur diminue avec R, et la courbe donne, par sa rencontre avec l'axe des y, la valeur limite de la capacité de l'électromètre pour $R = 0$, dans le cas où l'influence serait nulle.

Des tableaux ci-dessus on déduit (¹)

$$\text{Pour } R = 12,5, \ldots\ldots \quad \frac{E}{S} = 3,06, \quad \text{d'où} \quad E = 38,2;$$

$$\text{Pour } R = 10,6, \ldots\ldots \quad \frac{E}{S} = 3,69, \quad \text{d'où} \quad E = 39,1;$$

$$\text{Pour } R = 5,3, \ldots\ldots \quad \frac{E}{S} = 7,91, \quad \text{d'où} \quad E = 41,9.$$

Prolongée jusqu'à l'axe, la courbe construite avec ces données détermine, pour valeur de E, le nombre $E = 42,9$.

4. *Condensateurs sphériques.* — La valeur de E peut être déterminée directement en se servant de condensateurs sphériques. Dans un condensateur formé de deux sphères concentriques, la sphère extérieure étant en communication permanente avec le sol, la capacité de la

(¹) Ces nombres ne résultent, bien entendu, que des expériences pour lesquelles l'influence est minima, et les derniers nombres de chaque tableau n'entrent pas dans la moyenne.

sphère intérieure de rayon R est $\frac{RR'}{R'-R}$, comme nous l'avons établi ci-dessus; mais sur cette sphère il n'y a plus à craindre d'influence extérieure : on a donc ainsi un corps de capacité connue, à l'aide duquel on pourra déterminer la capacité de l'électromètre en toute rigueur, par la méthode exposée précédemment pour les sphères.

Les expériences ont été faites avec une sphère de rayon $R = 3^c,95$, supportée par quatre pieds de verre au centre d'une sphère creuse, de rayon $R' = 6^c,20$. Cette dernière portait une petite tubulure par laquelle passait un fil métallique permettant d'établir la communication de la sphère interne soit avec la pile, soit avec l'électromètre. La déviation observée δ_1 permettait de calculer, comme on l'a vu précédemment, la capacité E de l'électromètre, sachant que la capacité du condensateur est

$$C = \frac{RR'}{R'-R} = 10,9.$$

Il a été fait par cette méthode quatre séries d'expériences qui ont donné les nombres suivants :

δ_0	δ_1	$\frac{E}{C} = \frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_1}$	E
150,0	30,2	3,97	43,3
164,0	32,9	3,99	43,5
168,0	34,0	3,94	42,9
197,0	39,8	3,95	43,1

La moyenne de ces nombres très-concordants donne, pour valeur de E,

$$E = 43,2,$$

nombre très-peu différent de 42,9, que l'on avait déduit précédemment de la courbe donnant la variation apparente de capacité de l'électromètre avec le rayon des sphères de comparaison.

Dans ce qui précède, il a été nécessaire de s'appuyer sur cette propriété des condensateurs fermés, que la quantité d'électricité développée par influence sur l'armature externe, en relation avec le sol, est égale et de signe contraire à la quantité d'électricité que possède l'armature intérieure.

Ce théorème, démontré expérimentalement par Faraday, puis retrouvé par Clausius comme application des propriétés du potentiel, me semblait assez connu pour qu'une nouvelle démonstration en parût inutile; cependant, comme il vient d'être mis en doute et même nié complétement dans ces derniers temps ([1]), je crois utile d'y revenir aussi brièvement que possible.

La démonstration générale, dans le cas de surfaces absolument quelconques, de forme comme de position, a été donnée fréquemment ([2]). Comme elle est un peu longue, je me contenterai de la rappeler et de donner seulement une démonstration très-simple dans le cas de deux sphères concentriques, qui est justement celui que j'ai traité par expérience.

Considérons deux sphères concentriques : la sphère intérieure possède une certaine quantité Q d'électricité sous l'influence de laquelle se développent sur les deux faces de la sphère enveloppante des quantités $-Q'$ et $+Q'$ d'électricité.

Si nous prenons un point m, situé dans l'intérieur de la grande sphère, et à une distance d du centre, ce point étant à l'état neutre, les actions de toutes les couches électriques sur lui se font équilibre.

La couche extérieure $+Q'$, enveloppant le point m, exerce sur lui une action nulle.

La couche interne $-Q'$ de la grande sphère et la couche $+Q$ de la petite agissent toutes deux sur le point extérieur m, comme si elles étaient concentrées en leur centre. Leur action est donc

$$+\frac{Q}{d^2}-\frac{Q'}{d^2};$$

mais, comme le point m est en équilibre, ces actions ont une somme nulle; donc $Q=Q'$, c'est-à-dire que la quantité d'électricité induite est égale à l'électricité inductrice.

Ce théorème important a tout d'abord été démontré par Faraday de la manière suivante.

([1]) Volpicelli, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII; 31 mars 1874.

([2]) On pourra la trouver notamment dans le *Traité de la Théorie mécanique de la chaleur*, de M. Briot (*Électrostatique*, p. 222 et suiv.).

Il prend un long cylindre creux conducteur, fermé à une extrémité, parfaitement isolé, et en communication métallique avec un électroscope très-sensible. Dans ce cylindre il enfonce une boule métallique électrisée, tenue par un manche isolant. L'électroscope diverge, et, aux premiers instants, la divergence augmente à mesure qu'on enfonce la boule. A partir d'une certaine profondeur, quand le cylindre peut être considéré comme un corps fermé par rapport à la boule, la divergence devient constante, quels que soient les déplacements de la masse agissante, et elle ne change pas non plus quand on vient à toucher la boule avec le corps conducteur chargé.

Depuis la Note de M. Volpicelli, j'ai moi-même recommencé un grand nombre de fois cette expérience, qui m'a toujours donné le même résultat. Je l'ai variée encore de la manière suivante : la boule étant enfoncée dans le cylindre jusqu'au point où la divergence devient constante, on met un instant le cylindre en relation avec le sol. La divergence de l'électroscope devient nulle et reste nulle quand on vient à toucher le cylindre avec la boule chargée.

Enfin j'ai encore vérifié ce théorème avec le condensateur sphérique dont je devais me servir, et en employant les procédés de mesure les plus délicats. La boule intérieure du condensateur était suspendue par un fil de soie passant dans une toute petite tubulure de l'armature extérieure; celle-ci était composée de deux hémisphères de Magdebourg, reposant sur des pieds isolants. La boule étant suspendue bien au centre de l'armature interne, on soulevait l'hémisphère supérieur et l'on chargeait la sphère inductrice en la touchant avec une pile sèche très-puissante; on refermait l'armature extérieure, on la mettait un instant en relation avec le sol, puis en communication permanente avec l'aiguille de mon électromètre : celui-ci n'indiquait aucune déviation, toute l'électricité induite se trouvant retenue sur la face interne des hémisphères; puis on lâchait le fil de soie, de façon que la boule interne vînt toucher l'armature extérieure. A ce moment, l'électromètre persistait à rester au zéro. Si l'électricité inductrice avait été en excès, cet excès se serait immédiatement porté à la surface des hémisphères et sur l'électromètre. Dans mes expériences, l'électromètre était assez sensible et la charge de la sphère inductrice assez forte pour qu'on eût facilement pu apprécier $\frac{1}{10000}$ de cette charge.

Cette expérience peut donc être considérée comme une justification complète, mais, du reste, peu nécessaire, de l'emploi des condensateurs fermés.

5. *Capacité de deux sphères en contact.* — Pendant que mes appareils étaient tout disposés pour la comparaison de la capacité de l'électromètre et des sphères, il m'a paru intéressant de déterminer expérimentalement la capacité du système formé par deux sphères en contact. Ce cas est un des rares problèmes d'influence que l'Analyse ait pu résoudre complétement. La solution première a été donnée par Poisson (1), qui, après des calculs très-pénibles, a donné l'équation générale du problème et a calculé, dans quelques cas particuliers, la densité aux différents points des deux sphères, la densité moyenne sur chacune d'elles et les quantités d'électricité dont elles sont chargées pour un potentiel donné : ce dernier nombre est précisément la capacité, si le potentiel est égal à 1.

Plana (2) a repris et développé les calculs de Poisson; il a calculé, pour différents rapports des rayons des deux sphères, la charge que prend chacune d'elles pour un potentiel égal à l'unité; la somme de ces deux charges est précisément la capacité électrique du système.

Nous extrayons les nombres suivants du Mémoire de Plana; le rayon de la grande sphère a été pris pour unité, de sorte que, pour avoir la capacité d'un système de deux sphères, il faudra multiplier par le rayon de la grande sphère le nombre de la quatrième colonne, qui correspond au rapport des rayons des deux sphères :

Rayon de la petite sphère r'.	Charge de la grande sphère E_a.	Charge de la petite sphère E_b.	Capacité $C = E_a + E_b$.
1	0,69315	0,69315	1,38629
0,9	0,72108	0,59777	1,31885
0,8	0,75116	0,50496	1,25612
0,7	0,78267	0,41459	1,19726
0,6	0,81629	0,32831	1,14460
0,5	0,85161	0,24700	1,09861
0,4	0,88809	0,17228	1,06037

(1) Poisson, *Mémoires*, t. VII, p. 46 et 57.

(2) Plana, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin*, série II, t. VII; 1845.

Les expériences ont été faites comme pour mesurer la capacité d'une seule sphère. Pour éliminer autant que possible la cause d'erreur provenant de l'influence, on déterminait successivement la capacité apparente du système des deux sphères, puis la capacité apparente de la plus grosse seule, et l'on prenait leur rapport. Ce rapport doit être d'autant plus voisin de celui des capacités réelles que la petite sphère est plus petite, car l'influence sur le système entier ne diffère pas alors sensiblement de l'influence sur la grosse sphère seule. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

R	R'	$\frac{R}{R'}$	δ_0	δ_1	$\frac{C}{E}$	C
12,5	10,6	0,848	164,0	49,8	0,436	17,0
12,5	10,6	0,848	155,2	47,2	0,435	17,0
12,5	5,3	0,424	156,2	40,6	0,351	13,7
10,6	5,3	0,500	156,2	35,5	0,294	11,5
10,6	5,3	0,500	156,2	35,7	0,296	11,5
5,3	3,92	0,740	155,2	21,3	0,159	6,52

En se servant des nombres de Plana et en calculant par interpolation ceux qui conviennent aux valeurs des rapports $\frac{R'}{R}$ des rayons des sphères employées, on trouve entre le calcul et l'expérience les relations suivantes :

Sphères.	Capacité observée.	Capacité calculée.
12,5 + 10,6	17,0	16,06
12,5 + 5,3	13,7	13,36
10,6 + 5,3	11,5	11,65
5,3 + 3,92	6,52	6,46

L'accord est aussi complet que possible, excepté pour le premier nombre, où la différence observée est évidemment due à l'influence beaucoup plus grande sur le système des deux grosses sphères que sur l'une des deux seule.

$\frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{30}$ de leur valeur. On a cherché à la rendre aussi petite que possible en suspendant le cylindre par un fil de soie au milieu de la pièce, et aussi loin que possible de tout corps extérieur. On déterminait alors, comme on l'a dit plus haut, la capacité apparente $C' = E \frac{\delta_1}{\delta_0 - \delta_1}$ du cylindre. Ensuite on déterminait de la même manière la capacité apparente S' d'une sphère de rayon connu, et de dimensions aussi voisines que possible de celles du cylindre. Dans ces conditions, les deux corps ayant mêmes dimensions et occupant la même position, leurs capacités sont modifiées à peu près également par les corps extérieurs et le rapport $\frac{C'}{S'}$ sera très-exactement le même que le rapport des capacités vraies $\frac{C}{S}$. On aura donc

$$C = S\frac{C'}{S'},$$

où S représente le rayon de la sphère de comparaison.

Grâce à cet artifice, on a pu déterminer la capacité d'un cylindre avec une approximation qui est certainement de $\frac{1}{80}$ à $\frac{1}{100}$. Du reste, ce chiffre se trouve vérifié par ce fait que les capacités de cylindres semblables ont été trouvées proportionnelles aux dimensions homologues, quoique l'influence augmentât très-rapidement avec ces dimensions.

Les cylindres employés étaient :

1° Une série de cylindres de carton recouverts de papier d'étain, ayant tous 5 centimètres de rayon de base, et pour hauteurs 5, 10, 20 et 40 centimètres, ce qui permettait, en réunissant plusieurs de ces cylindres, de faire varier de 1 à 14 le rapport de la hauteur au rayon;

2° Deux grands cylindres ayant l'un 10 centimètres de rayon et 10 centimètres de hauteur, l'autre 5,5 de rayon et 70 centimètres de hauteur $\left(\frac{h}{r} = 12,7\right)$;

3° Des cylindres de hauteur variable, formés en empilant des disques de pile de Volta ayant $2^c,95$ de rayon. On les réunissait sans interposer de rondelles de drap et, pour éviter toute force électromotrice, on avait soin de réunir les disques par les faces semblables, zinc sur zinc, cuivre

sur cuivre. De la sorte, on était absolument dans le cas d'un cylindre métallique formé d'une seule substance.

Les résultats des expériences sont consignés dans les tableaux suivants :

1° *Cylindres de rayon* $r = 5^c$.

h	$\frac{h}{r}$	C	h	$\frac{h}{r}$	C
5	1	4,60	20	4	7,88
5	1	4,72	»	»	7,92
10	2	5,84	»	»	7,92
10	»	5,96	»	»	8,04
10	»	5,96	40	8	11,40
10	»	5,92	»	»	11,36
20	4	8,00	70	14	15,16
»	»	7,96	80	16	16,72
»	»	7,88			

2° *Cylindres de rayon* $r = 2,95$.

h	$\frac{h}{r}$	C	h	$\frac{h}{r}$	C
1,0	0,33	2,13	11,8	4,00	4,59
3,1	1,05	2,71	»	»	4,67
5,3	1,79	3,40	15,8	5,35	5,21
5,9	2,00	3,63	20,9	7,08	6,43
»	2,00	3,57	21,4	7,26	6,44
10,4	3,52	4,30	23,6	8,00	6,85
10,8	3,66	4,55			

3° *Cylindres divers.*

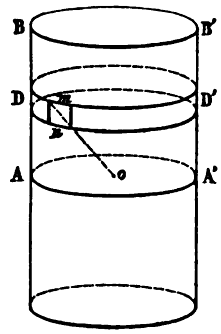
$$r = 10,\quad h = 10,\quad C = 9,48,\quad 9,40,$$
$$r = 5,5\quad h = 12,7\quad C = 16,34,\quad 16,15.$$

Restait à réunir tous ces nombres par une formule empirique simple, permettant de calculer facilement la capacité d'un cylindre de dimensions quelconques. Pour cela, je me suis laissé guider par les considérations suivantes.

Il est facile de calculer la capacité d'un cylindre ouvert de grande

longueur (*fig.* 3). En effet, supposons le cylindre assez long pour que, sur toutes les parties dont l'action sur le centre n'est pas négligeable,

Fig. 3.



la densité puisse être considérée comme constante. Le potentiel au centre produit par un élément mn sur lequel la densité est μ sera

$$dv = \frac{\mu\, dz\, dr}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

Le potentiel au centre dû à un anneau tel que DD' sera donc

$$2\pi\mu r \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}},$$

ce qui donnera, pour potentiel du demi-cylindre supérieur AB A'B',

$$\int_0^{\frac{h}{2}} 2\pi\mu r \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi\mu r\left[\mathrm{L}\left(\frac{h}{2}+\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4}}\right)-\mathrm{L}r\right] \quad \text{ou} \quad 2\pi\mu r \mathrm{L}\frac{h}{r},$$

si r^2 peut être négligé devant $\frac{h^2}{4}$.

Le potentiel du cylindre entier sera donc

$$\mathrm{V} = 4\pi\mu r \mathrm{L}\frac{h}{r}.$$

D'autre part, la quantité d'électricité que possède le cylindre est

$$\mathrm{Q} = 2\pi\mu r h.$$

La capacité C d'un cylindre ouvert, de très-grande hauteur, sera donc

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{h}{2L\frac{h}{r}}.$$

D'autre part, les intégrales elliptiques qui donnent la capacité d'un ellipsoïde peuvent être réduites dans le cas où l'ellipsoïde est de révolution et où l'axe diminue de plus en plus, ce qui amène le cas d'un plateau circulaire de rayon r. Elles donnent alors

$$C' = \frac{2}{\pi} r.$$

J'ai essayé, pour représenter la capacité d'un cylindre fermé, la formule

$$C = \frac{2r}{\pi} + \frac{h}{2L\left(A + \frac{h}{r}\right)},$$

où A est une constante à déterminer par expérience.

Cette formule représente complétement les expériences pour $A = 4^c$. En effet elle donne, comme capacités de cylindres de rayon $r = 5^c$, les valeurs suivantes :

Pour $h = 5^c$........	$C = 4,73$
Pour $h = 10^c$........	$C = 5,97$
Pour $h = 20^c$........	$C = 7,99$
Pour $h = 40^c$........	$C = 11,23$
Pour $h = 80^c$........	$C = 16,53$

qui sont justement, avec une approximation variant de $\frac{1}{60}$ à $\frac{1}{100}$, la moyenne des nombres donnés dans le tableau des expériences.

L'accord est encore plus grand si l'on compare les résultats donnés par l'expérience et par la formule pour des cylindres de rayon $r = 2,95$.

Si l'on introduit dans la formule les logarithmes ordinaires au lieu des logarithmes népériens, elle devient

$$C = \frac{2r}{\pi} + \frac{0,2171\,h}{\log\left(4 + \frac{h}{r}\right)}.$$

Cette formule, bien entendu, ne doit pas être considérée comme ayant une valeur théorique quelconque : c'est seulement une formule empirique qui peut donner la capacité d'un cylindre avec une approximation qui est certainement comprise entre $\frac{1}{60}$ et $\frac{1}{100}$, c'est-à-dire bien suffisante pour les besoins ordinaires de l'électricité (¹).

6. *Capacité d'un condensateur à lame d'air.* — La capacité d'un condensateur à lame d'air, qu'il importait de connaître pour la suite de ce travail, a été déterminée par la même méthode que toutes les capacités précédentes, en mettant le condensateur en communication avec une pile, puis avec l'électromètre.

Les deux plateaux circulaires étaient disposés horizontalement, le plateau inférieur en communication permanente avec le sol, le plateau supérieur suspendu par un manche isolant à un système de poulies qui permettait de l'abaisser ou de le relever à volonté, tout en le laissant parfaitement horizontal. Pour amener les plateaux à des distances connues exactement, on se servait de trois petites cales en verre, dont l'épaisseur avait été mesurée au sphéromètre, placées sur le plateau inférieur, et sur lesquelles venait s'appuyer le plateau supérieur. Ces cales avaient une surface assez petite (²) pour qu'on n'eût pas à se préoccuper de leur présence et de leur pouvoir inducteur spécifique.

J'ai employé deux paires de plateaux provenant d'électroscopes condensateurs; ils avaient respectivement pour rayons

$$9^c,15 \quad \text{et} \quad 4^c,90.$$

La marche de l'expérience était alors la suivante : les plateaux étant en présence, et le plateau inférieur en communication avec le sol, on chargeait le collecteur avec la pile; puis on mettait ce même collecteur

(¹) Il est bon de remarquer que la constante 4, qui figure sous le logarithme, n'a pas une valeur absolument définie. En effet, quand $\frac{h}{r}$ est grand, elle devient négligeable, et, même pour $\frac{h}{r} = 1$, ce qui est un des cas où elle a le plus d'influence, elle peut encore varier de $\frac{1}{20}$ de sa valeur (de 3,8 à 4) sans que $\log\left(A + \frac{h}{r}\right)$ varie de plus de $\frac{1}{100}$.

(²) Les trois cales recouvraient au plus $\frac{1}{3000}$ de la surface du plateau.

en relation avec l'électromètre. De la déviation δ_1 observée on déduisait la capacité C du condensateur par la formule connue

$$C = E \frac{\delta_1}{\delta_0 - \delta_1}.$$

Il me semble inutile de donner ici tous les nombres obtenus expérimentalement; je ne rapporterai que les moyennes. Les expériences elles-mêmes présentent entre elles le même degré de concordance que celles qui ont été citées plus haut, tout au long, sur les cylindres et les sphères.

Plateaux $r = 9,15$.

Épaisseur d'air e.	$\frac{e}{r}$	Capacité C.
mm 0,814	0,0089	290,0
1,104	0,0114	217,0
1,803	0,0197	135,0
2,781	0,0304	92,8
3,549	0,0387	73,8
7,086	0,0774	40,3
10,63	0,116	29,0
12,54	0,137	26,2
24,21	0,265	18,7

Plateaux $r = 9,90$.

e	$\frac{e}{r}$	C
mm 1,803	0,0368	45,2
2,781	0,0568	30,9
3,543	0,0723	25,4
7,086	0,144	14,9
10,63	0,217	11,2
12,54	0,256	10,0

Les nombres sont représentés très-exactement par les formules

$e(C - 6,80) = 237,5$, pour le premier condensateur,
$e(C - 3,90) = 76,2$, pour le second.

Comme 6,80 et 3,90 représentent évidemment dans ces formules la capacité du collecteur seul, si l'on voulait avoir la force condensante pour une épaisseur donnée, il faudrait diviser la capacité correspondant à cette épaisseur par 6,80 ou 3,90. On sait, en effet, que la force condensante est le rapport des capacités du collecteur quand il fait partie du condensateur, puisqu'il est seul.

Comme on le voit par les formules précédentes, la différence entre les capacités du collecteur, avec ou sans condensation, varie en raison inverse de la distance des deux plateaux, tant que cette distance reste inférieure à un quart de leur rayon, limite de mes expériences. Si la

distance est très-petite, la capacité du collecteur seul est négligeable devant celle du même collecteur faisant partie du condensateur, et l'on retrouve cette loi connue que la force condensante varie en raison inverse de l'épaisseur de la lame isolante.

Pour ce problème, il n'a pas été question d'influence. L'influence que peuvent exercer les corps extérieurs est effectivement négligeable devant celle du plateau du condensateur, surtout aux distances où j'ai opéré. Le seul effet qu'elle pourrait produire serait d'augmenter un peu la capacité du collecteur isolé; les nombres 6,80 et 3,90 semblent, en effet, plus forts que ceux que donnerait la théorie, s'ils pouvaient être considérés comme des disques circulaires sans épaisseur.

Depuis la rédaction de ce travail, il a été publié en Allemagne (¹) un Mémoire de Boltzmann *Sur les constantes diélectriques des corps isolants*. L'auteur étudie la capacité électrique d'un condensateur à plateaux de Kohlrausch, entre les plateaux duquel il interpose des lames isolantes de nature diverse.

La méthode de Boltzmann est à très-peu près la même que celle que j'ai employée, puisqu'il se sert également de l'électromètre de Thomson. Les résultats de ce travail n'étant pas encore publiés, j'ignore s'ils comprendront la détermination de la capacité du condensateur à lame d'air. Qu'il me suffise de rappeler ici que, d'après mes expériences, la différence entre les capacités du plateau collecteur faisant partie du condensateur, puis isolé, varie très-exactement en raison inverse de la distance des deux plateaux, au moins tant que cette distance est plus petite que le quart du rayon des plateaux, distance maxima où je me sois arrêté.

Une fois les capacités de l'électromètre, d'un cylindre et d'un condensateur déterminées, il est facile d'appliquer ces résultats à l'étude de la pile. Ce sera, du reste, principalement une question de théorie; quant aux expériences elles-mêmes, il suffira presque de citer les résultats, la méthode expérimentale étant la même que dans tous les cas précédents.

(¹) Boltzmann, *Poggendorff's Annalen*, t. CLI; 1874.

PHÉNOMÈNES ÉLECTROSTATIQUES DANS LES PILES (¹).

I. — *Théorie de Biot.*

La première théorie complète des phénomènes électrostatiques dans les piles a été donnée par Biot (²). Il part de cette hypothèse que, lorsque deux lames de zinc et de cuivre sont en contact, « le zinc prend au cuivre un excès d'électricité α, constant pour ces deux métaux, soit qu'ils se trouvent dans l'état naturel ou non. » Malheureusement, tous ses calculs sont dominés par une confusion résultant de ce qu'il n'a jamais fixé la véritable signification de cette lettre α. Tantôt elle semble représenter une densité électrique, tantôt une quantité d'électricité. Quoi qu'il en soit, nous allons résumer rapidement les raisonnements de Biot, en nous écartant le moins possible de ses propres termes.

Pour étudier l'état électrique au sommet d'une pile, Biot se sert d'un condensateur dont la force condensante sera F. En mettant un couple de la pile en communication conductrice avec le plateau collecteur seul, celui-ci prendra une charge E (quantité ou tension?) et le couple en possédera e. Nous poserons $\frac{E}{e} = i$. Supposons maintenant que l'on mette en communication avec le même couple le collecteur faisant cette fois partie du condensateur. Il prendra une certaine quantité d'électricité libre E′, tandis que le couple en possédera e', et l'on aura toujours

$$\frac{E'}{e'} = i.$$

D'autre part, la quantité totale d'électricité que possédera le condensateur sera

$$FE' = Fie'.$$

(¹) Ce travail a paru postérieurement à la précédente Thèse.

(²) BIOT, *Traité de Physique*, t. II, p. 478.

Connaissant donc F, i et E', on pourra en déduire e'.

Il se présente dans l'étude trois cas différents :

1° Pile dont un des pôles communique avec le sol;

2° Pile dont les deux pôles sont et ont toujours été isolés;

3° Pile dont un des pôles a été d'abord en communication avec le sol, puis isolé.

1° *Pile dont un pôle communique avec le sol.* — Supposons une pile à colonne formée en empilant des disques de cuivre et de zinc, et des rondelles de drap imbibées d'eau pure ou salée. Le cuivre inférieur, communiquant avec le sol, sera à l'état neutre; le premier zinc prendra un excès d'électricité α qu'il communiquera au premier drap et au deuxième cuivre. Le deuxième zinc, qui doit avoir sur le deuxième cuivre un excès α, possédera alors 2α qu'il transmettra au deuxième drap et au troisième cuivre, et ainsi de suite. Enfin le $n^{ième}$ zinc, le $n^{ième}$ drap et le dernier cuivre, dont on recouvre le drap pour en recueillir l'électricité, posséderont un excès $n\alpha$.

Si l'on met un condensateur en relation avec le pôle supérieur, le condensateur lui enlèvera une certaine charge qu'il reprend aussitôt à l'élément inférieur, celui-ci au suivant, et ainsi de suite jusqu'au dernier qui reprend tout au sol. L'état électrique de la pile n'est donc pas changé; la dernière pièce conserve une charge $n\alpha$, et le condensateur a pris une quantité d'électricité

$$M_s = F i n\alpha,$$

proportionnelle au nombre d'éléments de la pile.

2° *Pile complétement isolée.* — Si la pile est complétement isolée, on trouve la loi de distribution en écrivant que la différence de charge de deux éléments consécutifs, zinc-cuivre, est égale à α, et que la somme totale des quantités d'électricité est nulle.

Si le dernier zinc, de rang n, possède un excès d'électricité libre x, les lames de zinc consécutives possèdent des excès qui forment la progression arithmétique

$$x, \quad x-\alpha, \quad x-2\alpha, \ldots, \quad x-(n-1)\alpha,$$

dont la somme est

$$nx - \frac{n(n-1)}{2}\alpha.$$

La série des mêmes quantités pour les lames de cuivre sera

$$x-\alpha,\quad x-2\alpha,\quad x-3\alpha,\ldots,\quad x-n\alpha,$$

dont la somme est

$$nx - \frac{n(n+1)}{2}\alpha.$$

La quantité totale d'électricité doit être nulle, ce qui donne

$$2nx - n^2\alpha = 0,\quad \text{ou}\quad x = \frac{n}{2}\alpha.$$

Le zinc supérieur possédera donc un excès d'électricité libre $+\frac{n\alpha}{2}$, et le cuivre inférieur $-\frac{n\alpha}{2}$.

Pour la $p^{ième}$ pièce de zinc en partant du sommet, la charge est

$$x-(p-1)\alpha,\quad \text{ou}\quad \left[\frac{n}{2}-(m-1)\right]\alpha,$$

qui sera nulle pour $m = 1 + \frac{n}{2}$, c'est-à-dire pour l'élément du milieu.

Supposons maintenant que l'on mette le condensateur en communication avec l'élément supérieur. La charge de ce dernier, qui était $\frac{n\alpha}{2}$, devient x, et la charge totale de la pile est

$$\varphi = 2nx - n^2\alpha;$$

quant au collecteur, il possède un excès d'électricité libre ix : donc une quantité totale

$$M_1 = Fix.$$

La charge totale du système devant être nulle, on aura

$$Fix + 2nx - n^2\alpha = 0,$$

d'où

$$x = \frac{n^2\alpha}{Fi+2n}\quad \text{et}\quad M_1 = \frac{Fin^2\alpha}{Fi+2n}.$$

Mais, dans le cas de la pile dont un des pôles communiquait avec le sol, on avait

$$M_0 = Fin\alpha,$$

donc

$$M_1 = M_0 \frac{n}{2n + Fi}.$$

Cherchons maintenant le rang y de l'élément qui est devenu neutre. L'excès électrique de cet élément est

$$x - (p - 1)\alpha = \frac{n^2\alpha}{Fi + 2n} - (p - 1)\alpha.$$

Pour l'élément neutre, on aura

$$\frac{n^2\alpha}{Fi + 2n} - (p - 1)\alpha = 0, \quad \text{d'où} \quad p = 1 + \frac{n^2}{Fi + 2n}.$$

Biot a calculé de même ce qui se passerait si, au lieu de mettre le condensateur en relation avec le dernier élément de la pile, on lui faisait toucher un élément de rang quelconque. Ce calcul se fait absolument comme le précédent et ne présente rien d'intéressant; nous nous dispenserons donc de le répéter.

3° *Pile dont un des pôles, d'abord en communication avec le sol, est ensuite isolé.* — Dans ce cas, la charge au pôle inférieur, d'abord en communication avec le sol, est nulle, et l'excès du pôle supérieur est $n\alpha$.

La charge que possède la pile est donc

Sur les zincs....... $n\alpha + (n - 1)\alpha + \ldots + \alpha = \dfrac{n(n+1)\alpha}{2}$,

Sur les cuivres..... $(n - 1)\alpha + (n - 2)\alpha + \ldots + \alpha = \dfrac{n(n-1)\alpha}{2}$;

la charge totale est donc

$$\frac{n(n+1)}{2}\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha = n^2\alpha.$$

Si l'on met le condensateur en contact avec le pôle resté isolé, celui-ci conserve un excès x, et le condensateur prend

$$M_2 = Fix.$$

La charge sur la pile est, comme précédemment,

$$Q = 2nx - n^2\alpha.$$

La charge totale doit être égale à $n^2\alpha$; on aura donc

$$Q + M_2 = Fix + 2nx - n^2\alpha = n^2\alpha,$$

d'où

$$n = \frac{2n^2\alpha}{Fi + 2n} \quad \text{et} \quad M_2 = \frac{2Fin^2\alpha}{Fi + 2n} = 2M_1.$$

La charge du condensateur est double de celle du cas précédent.

Quant au rang de l'élément devenu neutre, il est donné par l'équation

$$x - (p' - 1)\alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{2n^2\alpha}{2n + Fi} - (p' - 1)\alpha = 0,$$

d'où

$$p' = 1 + \frac{2n^2}{2n + Fi}.$$

On pourrait également calculer M_2 et p' pour le cas où ce serait un élément de rang m et non plus le dernier que l'on mettrait en communication avec le condensateur.

II. — *Théorie par le potentiel.*

L'idée de la nouvelle théorie des phénomènes électrostatiques de la pile a été puisée dans le Cours professé au Collége de France par M. Mascart (1873). C'est pour prononcer entre cette théorie et celle de Biot que tout le présent travail a été entrepris.

Elle repose sur les principes suivants, qui sont presque identiques à ceux d'où était parti Biot, avec cette différence que le sens parfaitement défini cette fois des mots *quantité d'électricité* et *potentiel* rend toute confusion impossible.

Au contact de deux substances hétérogènes quelconques, solides ou liquides, il se produit une différence de potentiel, constante pour les deux mêmes substances, et qui ne dépend ni de leur forme, ni de l'étendue des surfaces en contact, ni de leur état électrique antérieur; elle ne peut changer qu'avec la température.

Considérons maintenant une pile formée des éléments cuivre, zinc et drap mouillé. Désignons par m la différence de potentiel due au con-

tact zinc-cuivre, μ celle du contact zinc-drap mouillé, et μ' cuivre-drap mouillé, ces nombres pouvant avoir des signes quelconques. Le potentiel du zinc inférieur étant v, celui du drap mouillé sera $v+\mu$, celui du cuivre, $v+\mu+\mu'$, et enfin celui du zinc suivant, $v+\mu+\mu'+m$. Le potentiel au sommet de ce nouvel élément est donc $v+\mu+\mu'+m$, celui de l'élément précédent étant v. Sans entrer dans le détail, et quels que soient les signes de μ, μ' et m, on voit donc que la différence de potentiel aux deux extrémités d'un élément de pile est constante et peut être représentée par un nombre $\alpha = m + \mu + \mu'$, qui ne dépend que des substances en contact. Avec ce seul principe, et en appliquant les théorèmes du potentiel, il est facile d'établir la théorie de la pile dans les trois cas étudiés plus haut :

1° *Pile dont un pôle communique avec le sol.* — Dans le couple qui communique avec le sol, l'extrémité inférieure est au potentiel zéro, l'extrémité supérieure au potentiel α; celle du couple suivant aura le potentiel 2α, puisque la différence de potentiel aux deux extrémités d'un couple est indépendante de son état électrique. De même, au sommet de la pile, au $n^{ième}$ couple, le potentiel sera $n\alpha$.

Si l'on met un condensateur de capacité C en relation avec ce pôle, il prendra le même potentiel $n\alpha$, puisque le potentiel est indépendant de la forme et des dimensions du pôle. La charge totale du condensateur sera donc

$$M_1 = Cn\alpha.$$

2° *Pile complétement isolée.* — La pile étant formée de n couples, la différence de potentiel aux deux pôles sera toujours $n\alpha$; mais tout est symétrique par rapport au milieu de la pile, de sorte que, pour des raisons analogues à celles qui ont été données dans la théorie de Biot, le potentiel à l'un des sommets sera $+\frac{n\alpha}{2}$, et à l'autre, $-\frac{n\alpha}{2}$.

Supposons qu'on mette un corps de capacité C en communication avec un des pôles; le potentiel diminue de v sur ce pôle; mais il baisse en même temps de la même quantité sur toute la pile, car la différence de potentiel aux extrémités d'un couple est constante et indépendante de la valeur absolue de ce potentiel. (Ce point sera plus tard démontré directement au moyen d'expériences faites par Peltier, sans aucune idée théorique préconçue.)

On a donc enlevé partout le même potentiel, c'est-à-dire une couche en équilibre d'elle-même. Or c'est là la seule propriété dont on se soit servi pour établir les équations de partage électrique entre des corps conducteurs. Au point de vue du partage électrique, la pile isolée se comporte donc absolument comme un corps conducteur, malgré toute sa complexité (1).

On conçoit dès lors qu'on puisse parler de la *capacité électrique* d'une pile, bien que ce mot ne puisse plus se rapporter à la définition qu'on en a donnée en parlant des corps conducteurs. Pour ces derniers, en effet, la définition de la capacité résultait de celle du potentiel, et de ce fait que le potentiel était constant dans tout l'intérieur du corps, ce qui n'a plus lieu pour la pile.

Le mot *capacité* d'une pile devra donc être compris comme représentant la capacité d'un corps conducteur semblable à la pile proposée, et de dimensions telles que, chargé à un potentiel égal à celui du point touché sur la pile, il abandonne aux corps avec lesquels on le met en relation la même quantité d'électricité que la pile elle-même.

Quant aux dimensions absolues de ce conducteur, du moment que l'équation de partage entre la pile et un corps conducteur s'établit absolument comme pour deux corps conducteurs, on ne voit *a priori* aucune raison pour qu'elles soient différentes de celles de la pile elle-même. Ceci pourrait peut-être être démontré directement par le calcul; mais la vérification expérimentale s'est présentée d'elle-même dans ce travail de la manière suivante :

Soient K la capacité de la pile, définie comme il vient d'être dit; P celle du cylindre conducteur homogène qui aurait mêmes dimensions que la pile, et C la capacité du corps extérieur, avec lequel on les mettra en communication.

Le potentiel au sommet de la pile isolée étant $\frac{n\alpha}{2}$, et baissant de v par suite du contact avec le corps C, ce dernier prend une charge M_1, telle qu'on ait

$$M_1 = \left(\frac{n\alpha}{2} - v\right) C = Kv,$$

(1) Voir les *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, séance du 29 juin 1874.

d'où l'on déduit

$$v = \frac{n\alpha}{2}\,\frac{C}{C+K} \quad \text{et} \quad M_1 = \frac{n\alpha}{2}\,\frac{CK}{C+K}.$$

Si, d'autre part, on charge le cylindre conducteur de capacité P, et de mêmes dimensions que la pile, avec une source au potentiel $\frac{n\alpha}{2}$, puis qu'on le mette en communication avec le même corps C que précédemment, ce dernier prendra une charge M'_1 telle, qu'on ait

$$M'_1 = \left(\frac{n\alpha}{2} - v'\right)C = Pv',$$

d'où

$$v' = \frac{n\alpha}{2}\,\frac{C}{C+P} \quad \text{et} \quad M'_1 = \frac{n\alpha}{2}\,\frac{CP}{C+P} \text{ (}^1\text{)}.$$

Si l'expérience donne $M_1 = M'_1$, il faudra en conclure que $K = P$, c'est-à-dire que la capacité d'une pile, telle qu'on l'a définie plus haut, est exprimée par le même nombre que celle d'un cylindre homogène de mêmes dimensions.

Or on trouve plus loin (p. 302) les déviations obtenues en mettant la pile en relation avec l'électromètre, c'est-à-dire la charge M_1 de l'électromètre.

D'autre part, pour déterminer la capacité d'un cylindre, on chargeait ce dernier avec 100 éléments, puis on le mettait en relation avec l'électromètre. De la déviation ainsi obtenue on déduit, par simple proportionnalité, celle qu'on aurait observée si l'on n'avait chargé le cylindre qu'avec n éléments, c'est-à-dire M'_1.

Or ces nombres, résultant d'expériences faites quelquefois à deux ou trois mois de distance, sont rigoureusement concordants, l'écart maximum n'atteignant jamais $\frac{1}{40}$ et rarement $\frac{1}{60}$ de leur valeur.

Dans tout ce qui suivra, nous serons donc en droit de prendre pour

(1) Il faut ici n éléments au lieu de $\frac{n}{2}$, car les nombres de la page 302 se rapportent au cas d'une pile d'abord en communication avec le sol; la charge serait alors

$$M_2 = n\alpha\frac{CK}{C+K}.$$

capacité de la pile le même nombre que la capacité du cylindre homogène de mêmes dimensions.

Ceci bien établi, revenons au cas qui nous occupe, celui de la pile complétement isolée, de capacité $K = P$, en relation avec un corps C.

Nous venons d'établir que la charge que prend ce dernier est

$$M_1 = \frac{n\alpha}{2} \frac{CP}{C+P};$$

mais, pour la pile communiquant avec le sol, on avait

$$M_0 = n\alpha C, \quad \text{donc} \quad M_1 = \frac{M_0}{2} \frac{P}{P+C}.$$

Si l'on veut le rang de l'élément devenu neutre, le potentiel au sommet est

$$\frac{n\alpha}{2} - v = \frac{n\alpha}{2} \frac{P}{P+C};$$

le potentiel sur le $p^{ième}$ élément en descendant sera donc

$$\frac{n\alpha}{2} \frac{P}{P+C} - (p-1)\alpha,$$

ce qui donnera, pour rang de l'élément neutre,

$$p = 1 + \frac{n}{2} \frac{P}{P+C}.$$

3° *Pile dont un des pôles a d'abord été en communication avec le sol, puis isolé.* — Le pôle inférieur, d'abord en communication avec le sol, a un potentiel nul; celui du sommet est $n\alpha$. Si on le fait communiquer avec un condensateur, le potentiel sur toute la pile baisse de v'; la pile perd donc une quantité d'électricité Pv'. Le potentiel du sommet et du condensateur étant devenu $n\alpha - v'$, le condensateur a gagné une charge

$$M_2 = C(n\alpha - v') = Pv',$$

d'où

$$v' = n\alpha \frac{C}{C+P} \quad \text{et} \quad M_2 = n\alpha \frac{PC}{P+C} = 2M_1.$$

Le rang de l'élément neutre sera donné par un raisonnement analogue à celui du cas précédent; il sera

$$p' = 1 + n\frac{P}{P+C}.$$

Le calcul serait tout aussi simple dans les trois cas si, au lieu de réunir le condensateur au dernier élément, on lui faisait toucher un élément d'ordre quelconque.

Nous résumons dans le tableau suivant les formules obtenues par les deux méthodes :

Théorie de Biot.	Théorie du potentiel.
1° *Pile dont un pôle communique avec le sol.*	
Excès au sommet : $n\alpha$.	Potentiel au sommet : $n\alpha$.
Charge du condensateur : $M_0 = Fin\alpha$.	Charge du condensateur : $M_0 = Cn\alpha$.
2° *Pile complétement isolée.*	
Excès au sommet : $\pm\frac{n\alpha}{2}$.	Potentiel au sommet : $\pm\frac{n\alpha}{2}$.
Charge du condensateur : $M_1 = M_0\frac{n}{2n+Fi}$.	Charge du condensateur : $M_1 = \frac{M_0}{2}\frac{P}{P+C}$.
Rang de l'élément neutre : $p = 1 + \frac{n^2}{2n+Fi}$.	Rang de l'élément neutre : $p = 1 + \frac{n}{2}\frac{P}{P+C}$,
3° *Pile en relation avec le sol, puis isolée.*	
Excès au sommet : $n\alpha$.	Excès au sommet : $n\alpha$.
Charge du condensateur : $M_2 = M_0\frac{2n}{2n+Fi} = 2M_1$.	Charge du condensateur : $M_2 = M_0\frac{P}{P+C} = 2M_1$.
Rang de l'élément neutre : $p' = 1 + \frac{2n^2}{2n+Fi}$.	Rang de l'élément neutre : $p' = 1 + n\frac{P}{P+C}$.

Ces deux séries de formules ont de grandes analogies; elles sont cependant incompatibles, au moins dans les deux derniers cas. En effet, elles ne deviendraient identiques que si l'on pouvait poser

$$\frac{C}{P} = \frac{Fi}{2n},$$

ce qui exigerait que la capacité de la pile fût proportionnelle au nombre des éléments ou à sa hauteur : or nous avons vu que la capacité d'un cylindre est bien loin de jouir de cette propriété. De plus, dans la théorie de Biot, la charge du condensateur et la position de l'élément neutre ne semblent pas dépendre de la hauteur des éléments de la pile, pourvu que l'élément terminal reste le même. Dans la théorie du potentiel, au contraire, la hauteur même de la pile a une influence très-grande, puisque c'est un des facteurs de la capacité.

Les deux théories ne sont d'accord que dans un cas, celui de la pile en communication permanente avec le sol. C'est justement le seul cas que l'on ait vérifié expérimentalement. Pour les autres cas, comme les signes électroscopiques que l'on avait tirés de la pile complétement isolée avaient toujours été très-faibles, aucune expérience n'avait été tentée, et l'on avait simplement remarqué que les quantités d'électricité obtenues paraissaient plus faibles que ce qu'indiquaient les formules de Biot.

III. — *Étude expérimentale.*

Le premier fait à vérifier est que la différence de potentiel aux deux extrémités d'un couple est constante et indépendante de l'état électrique du couple. Cela est démontré par cette conséquence, que dans une pile le potentiel au sommet est proportionnel au nombre des éléments. Cependant on trouve dans des expériences de Peltier (1) une démonstration directe de ce fait. Cette démonstration est d'autant plus remarquable que Peltier n'a eu aucune idée de la signification vraie de ses expériences et du calcul qui leur est applicable (2).

(1) *Notice sur la vie et les travaux de Peltier*, p. 94.

(2) Cette interprétation des expériences de Peltier est due à M. Mascart.

Il prenait un élément de pile, par exemple de pile sèche, porté par des supports isolants, et dont les deux pôles communiquaient avec les deux plateaux d'un condensateur C. Le plateau supérieur pouvait, en outre, être mis en relation avec un électromètre. Après dix secondes de contact, on rompt les communications, et on mesure la charge du collecteur A. Puis on ramène le plateau condensateur B à l'état neutre, et l'on remet tout en place, en laissant au plateau A la charge qu'il possède. Rompant de nouveau les communications, on obtient pour A une nouvelle charge plus forte que la première, et ainsi de suite.

Soit Q la charge que prend A dans le premier contact; au second contact, cette charge se distribue sur tout l'appareil, et A n'en conserve que mQ, m étant un nombre plus petit que l'unité. Si la différence de potentiel est indépendante de l'état électrique du corps, A prendra dans le second contact une nouvelle charge Q; il possédera donc

$$Q_2 = m\,Q_1 + Q;$$

après trois contacts,

$$Q_3 = m\,(mQ + Q) + Q = Q\,(1 + m + m^2),$$

et après n contacts,

$$Q_n = Q\,(1 + m + \ldots + m^{n-1}) = Q\,\frac{1 - m^n}{1 - m}.$$

Les forces dans l'électromètre de Peltier étaient proportionnelles au carré de la charge, on avait donc

$$\sqrt{F_n} = \sqrt{F}\,\frac{1 - m^n}{1 - m} \quad \text{ou} \quad \frac{1 - m}{1 - m^n}\sqrt{F_n} = \text{const.}$$

Les expériences ont été faites par Peltier, mais sans aucune idée théorique; il donne seulement les résultats numériques sans en déduire de conséquences. Ces résultats forment les trois premières colonnes du tableau ci-après; la dernière donne la comparaison des expériences avec le calcul en prenant $m = 0{,}81$.

Nombre de contacts n.	Déviation.	Force correspondante F.	$\sqrt{F_n}\,\frac{1-m}{1-m^n}$	Nombre de contacts n.	Déviation.	Force correspondante F.	$\sqrt{F_n}\,\frac{1-m}{F-m^n}$
1	6°,5	6,5	2,55	8	28°,2	87,4	2,17
2	12,0	15,4	2,16	9	29,2	94,6	2,17
3	16,0	28,5	2,16	10	30,0	101,0	2,17
4	19,5	41,0	2,13	11	30,7	106,6	2,18
5	22,5	53,75	2,14	12	31,3	111,6	2,17
6	25,0	66,5	2,16	13	31,6	114,3	2,16
7	27,0	79,0	2,19				

C'est un fait extrêmement remarquable qu'un tel accord entre des expériences et une théorie qui leur est de beaucoup postérieure.

I. *Pile dont un pôle communique avec le sol.* — Le seul fait à vérifier dans ce cas est que le potentiel au pôle isolé de la pile et la charge qu'y prend un condensateur sont proportionnels au nombre des éléments et indépendants de leurs dimensions.

La première vérification a dû être faite par Coulomb. Biot ([1]) dit en effet qu'il a ouï dire à Coulomb qu'il avait vérifié cette loi, et qu'elle lui avait paru exacte; mais il n'a été conservé aucune trace de ces expériences.

Les premières expériences ont réellement été faites par Biot ([2]); il se servait d'un condensateur et de la balance de Coulomb et a établi les points suivants :

1° *La charge au sommet est indépendante de la dimension des éléments.* — Trois piles de vingt couples dont les disques avaient respectivement pour surfaces 1, 3,1 et 153,2 ont donné des charges dans le rapport de 1,07, 1 et 1.

2° *La charge est indépendante de l'étendue des surfaces en contact.* — Deux piles, dans lesquelles l'étendue des parties humides des rondelles de drap était comme 1 et 9, ont donné des charges dans le rapport de 1 à 1,09.

On ne trouve dans Biot aucune trace de mesures indiquant la proportionnalité de la charge au nombre des éléments.

([1]) Biot, *Traité de Physique*, p. 480 et suiv. (1816).
([2]) *Loco citato.*

Peltier (¹) a mesuré la tension (potentiel) au sommet d'une pile, au moyen de dix couples en couronne, isolés sur un gâteau de résine. Il mettait les deux pôles en communication avec les deux plateaux d'un condensateur dont il mesurait la charge, soit avec la balance de torsion, soit avec son électromètre. Il a donné les nombres suivants :

Nombre d'éléments n.	Déviation.	Force correspondante F.	$\frac{F}{n^2}$	Nombre d'éléments n.	Déviation.	Force correspondante F.	$\frac{F}{n^2}$
1	12°,0	15,6	15,6	6	64°,0	536	14,9
2	24,5	61,0	15,2	7	73,0	734	15,0
3	35,0	144,0	16,0	8	83,0	1044	16,3
4	45,0	253,0	15,8	9	93,0	1349	16,6
5	55,5	393,0	15,7	10	103,0	1594	15,9

Le quotient $\frac{F}{n^2}$ étant constant, Peltier en concluait que la tension au sommet était proportionnelle au nombre des couples. Mais ces expériences, données depuis comme contradictoires avec la loi, en sont réellement une excellente vérification. En effet, pour graduer son électromètre, Peltier le mettait en relation avec une balance de torsion dont les deux boules étaient réunies par un fil de platine et de l'acide sulfurique, et ramenées par torsion du micromètre à une distance constante. Dans ces conditions, les deux boules étant en communication métallique, la force est proportionnelle au carré de la charge. La charge du condensateur est donc bien proportionnelle au nombre d'éléments de pile employés à le charger.

Péclet (²), s'appuyant sur la proportionnalité présumée, s'en est servi pour graduer son électroscope. En opérant sur des éléments zinc-fer et peau de chamois humide, il a trouvé les nombres suivants :

n	δ	$\frac{\delta}{n}$	n	δ	$\frac{\delta}{n}$
1	7°	7,0	4	29°	7,25
2	15	7,5	5	39	7,8
3	21	7,0	6	50	8,3

(¹) PELTIER, *loc. cit.*, p. 90.

(²) PÉCLET, *Annales de Chimie et de Physique*, t. II; 1841.

Mais, comme il avait également gradué son électromètre par une autre méthode (avec le condensateur multiplicateur), les nombres cités plus haut peuvent être considérés comme une nouvelle vérification de la loi.

Depuis, Kohlrausch (¹) et Hankel (²) ont supposé la loi de Biot démontrée, et l'ont employée pour graduer leurs électromètres.

Enfin, tout récemment, M. Branly (³) a repris cette question. Il se servait d'une balance de torsion à miroir, dont les deux boules étaient en communication métallique; les indications de l'appareil étaient donc proportionnelles au carré de la charge. J'extrais de son travail les nombres suivants :

Nombre d'éléments n	Distance angulaire des deux boules.	Torsion.	Carré de la charge q^2	$\frac{q}{n}$
0	7°.31'.20"	0"		
100	7.35.46	533	9,354	3,058
200	7.48.8	2016	37,5	3,061
250	7.56.14	2988	57,53	3,034

Avant de me servir moi-même de cette propriété pour graduer mon électromètre, je l'ai vérifiée avec mon électromètre même, en me maintenant dans des déviations assez petites pour que la proportionnalité de la charge à la déviation fût certaine.

J'ai ainsi obtenu les nombres suivants :

n	δ	$\frac{\delta}{n}$	n	δ	$\frac{\delta}{n}$
10	1,8	1,80	60	11,2	1,86
20	3,7	1,85	70	13,0	1,85
30	5,5	1,83	80	14,8	1,85
40	7,4	1,85	90	16,7	1,85
50	9,3	1,86	100	18,5	1,85

L'ensemble de toutes les expériences vérifie donc à la fois les deux théories pour ce premier cas.

(¹) KOHLRAUSCH, *Poggendorff's Annalen*, t. LXXXII; 1851.

(²) HANKEL, *Poggendorff's Annalen*, t. CXV; 1862.

(³) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2ᵉ série, t. II, p. 603.

II. *Pile complétement isolée.* — Aucune expérience, à ma connaissance, n'a été faite sur des piles complétement isolées. Les recherches peuvent porter sur deux points : 1° charge d'un condensateur; 2° recherches de l'élément neutre, et elles devraient être faites sur une pile ayant toujours été isolée, et sur une pile d'abord en communication avec le sol, puis isolée; mais il est presque impossible d'opérer avec une pile complétement isolée : pour la monter, il faut toucher les éléments, c'est-à-dire les mettre en communication avec le sol. Il faut alors un temps considérable pour être sûr que la déperdition a ramené la distribution à ce qu'elle devrait être si la pile avait toujours été isolée. Enfin, dès que la pile a servi une fois, sa distribution électrique a changé, et l'on ne peut plus, de longtemps, faire une seconde expérience. On pourrait encore, au lieu d'attendre que la déperdition ait ramené sur la pile une distribution normale, mettre un instant le milieu de la pile en communication avec le sol; mais cela supposerait, dans les deux moitiés de la pile, une identité sur laquelle il est impossible de compter. Je n'ai donc opéré, généralement, que sur des piles d'abord en communication avec le sol, puis isolées, en déterminant la charge qu'elles donnent un instant après leur isolement, soit à un condensateur, soit directement à l'électromètre.

J'ai cependant vérifié que la pile, complétement isolée, donne une charge deux fois moindre que la pile qui a été un instant en communication avec le sol. La pile, ayant été montée pendant une demi-journée, a donné à l'électromètre une charge représentée par une déviation de 5,1. La même pile, un instant après, a été mise en communication avec le sol par son pôle inférieur, puis isolée; le pôle supérieur a donné une déviation 10,4, quantité double de la précédente, ainsi que le veulent les deux théories exposées plus haut.

La pile qui m'a servi est une pile à colonne de Volta, dont les disques avaient $2^c,95$ de rayon; les disques de drap ou de papier à filtre étaient imbibés d'eau filtrée ordinaire. La pile reposait sur trois pieds de verre, vernis à la gomme laque, et terminés par trois petites tiges de cire d'Espagne. Un des pôles de la pile était en communication permanente avec le sol, afin d'avoir toujours une distribution bien constante ; on ne rompait la communication qu'au moment même de faire l'expérience, qui consistait à mettre l'autre pôle en communication

lointaine, par un fil très-fin, soit avec le condensateur, soit avec l'électromètre même. Si l'on se servait du condensateur, on en déterminait ensuite la charge en le mettant en communication lointaine avec l'électromètre, et en appliquant la règle des partages électriques.

D'après la théorie de Biot, la quantité d'électricité que la pile isolée peut donner à un condensateur ou à l'électromètre varie avec les dimensions du dernier élément de la pile, mais est indépendante, par exemple, de la hauteur totale de la pile, de l'épaisseur des disques de drap. Il n'en est plus de même dans la théorie du potentiel, où cette épaisseur change la hauteur totale de la pile, et, par suite, sa capacité.

Les expériences ont été faites avec une pile de 40 éléments, montée d'abord avec des rondelles de drap, ce qui donnait à la pile une hauteur de $24^c,9$, puis avec des rondelles de papier à filtre, ce qui réduisait la hauteur à $21^c,4$. Dans les deux cas, la pile non isolée donnait la même déviation (71,0) à l'électromètre; en relation un instant avec le sol. puis isolée, la première a donné une déviation de 10,35, la seconde de 9,35.

Au point de vue qualitatif, cette expérience seule suffit pour décider entre les deux théories.

Une comparaison exacte a été faite des résultats donnés par l'expérience avec ceux de la théorie du potentiel. On a fait varier autant que possible la capacité de la pile, soit en remplaçant les rondelles de drap par du papier, soit, au contraire, en superposant plusieurs disques de cuivre à un même disque de zinc, de façon à augmenter beaucoup la hauteur de la pile sans changer le nombre des éléments. On observait la déviation obtenue, soit en mettant cette pile directement en relation avec l'électromètre, soit en s'en servant pour charger un condensateur, et déterminant la charge de celui-ci. Connaissant les capacités de l'électromètre, de la pile et du condensateur, on pouvait calculer la valeur de cette même déviation, au moyen des formules établies plus haut, et dans lesquelles tous les éléments sont connus, et comparer ainsi l'expérience à la théorie.

Parmi toutes les expériences, il me suffira de citer les suivantes :

1° *Pile en relation directe avec l'électromètre.*

Nombre d'éléments n.	Hauteur h.	Capacité P.	Pile non isolée. — Déviation δ_0.	Pile isolée. — Déviation δ_1.	Rapport $\frac{\delta_0}{\delta_1}$ observé.	calculé.
10	cm 6,15	3,57	15,0	1,3	11,5	12,7
20	12,45	4,83	35,5	3,8	9,35	9,60
30	18,90	5,89	53,5	6,6	8,11	8,06
40	21,40	6,27	71,0	9,35	7,60	7,60
40	24,90	6,82	71,0	10,35	6,90	7,12
40	25,0	6,84	75,0	10,35	7,24	7,08
60	38,4	8,60	112,5	19,0	5,92	5,80

2° *Pile en relation avec un condensateur.*

Condensateur. Rayon r.	Épaisseur d'air e	Pile. Nombre d'éléments n.	Hauteur h.	Capacité P.	Pile non isolée. — Déviation δ_0.	Pile isolée. — Déviation δ_2.	Rapport $\frac{\delta_0}{\delta_2}$ observé.	calculé.
4,90	mm 3,543	20	cm 12,8	4,89	43,2	2,6	16,6	16,1
»	»	20	20,0	6,07	»	3,3	14,0	13,5
»	»	20	30,0	7,60	»	3,9	11,1	11,3
4,90	10,629	20	12,8	4,89	41,3	2,70	15,5	15,84
»	7,086	»	»	»	»	2,75	15,1	15,6
»	3,543	»	»	»	»	2,65	15,6	16,1
4,90	10,63	40	24,7	6,80	82,2	6,6	12,4	12,96
»	7,086	»	»	»	»	6,6	12,4	12,60
»	3,543	»	»	»	»	6,8	12,0	12,37
9,15	1,803	40	25,0	6,84	75,0	2,9	25,9	25,02
»	3,543	»	»	»	»	4,3	17,5	18,06
»	7,086	»	»	»	»	5,2	14,4	13,97
»	24,21	»	»	»	»	6,1	12,3	12,15
9,15	1,803	60	38,6	8,65	112,5	5,4	20,8	20,04
»	3,543	»	»	»	»	7,5	15,0	14,58
»	7,086	»	»	»	»	9,5	11,8	11,46
»	24,21	»	»	»	»	11,0	10,2	10,21

Malgré les déterminations de toutes sortes qu'il a fallu faire pour calculer δ_2 (détermination de la capacité de l'électromètre, de la pile, du condensateur), l'accord entre la théorie et les expériences est aussi complet que possible, puisque la plus grande erreur relative est de $\frac{1}{30}$.

On voit qu'il serait inexact de dire que les signes électroscopiques que donne la pile isolée sont très-faibles : dans quelques-unes des expériences ci-dessus, la déviation donnée par la pile complétement isolée a atteint le $\frac{1}{7}$ et le $\frac{1}{6}$ de celle de la pile communiquant avec le sol. Elle serait la moitié si l'on construisait une pile de dimensions telles, que sa capacité fût égale à celle de l'électromètre ; au moyen de la formule qui donne la capacité d'un cylindre, il serait facile de déterminer *a priori* ces dimensions.

2° *Recherche de l'élément neutre.* — Pour rechercher la position de l'élément neutre, on faisait communiquer un instant le pôle inférieur avec le sol; puis, immédiatement après, on réunissait le pôle supérieur avec un condensateur. On touchait alors, avec le fil de l'électromètre, un élément de rang déterminé. On observait alors, en général, une déviation. On recommençait de la même façon, jusqu'à ce qu'on fût arrivé à un élément qui ne donnât pas de déviation à l'électromètre, ou que les déviations données par deux éléments consécutifs fussent de signes contraires. La seule précaution à prendre était, avant chaque essai, de remettre un instant la pile en communication avec le sol, pour rétablir la distribution normale.

Les expériences ont été faites successivement avec les deux condensateurs, et ont donné les résultats suivants :

1° *Condensateur de rayon* $r = 4{,}9$.

Épaisseur d'air e.	Capacité du condensateur C.	Nombre d'éléments n.	Hauteur h.	Capacité de la pile P.	Rang de l'élément neutre observé.	Rang de l'élément neutre calculé.
mm 3,543	24,50	20	cm 12,8	4,89	5	4,33
7,086	10,40	»	»	»	6	7,4
10,629	9,05	»	»	»	7	8,0
3,543	24,50	40	24,7	6,80	11	9,7
7,086	10,40	»	»	»	15-16	16,8
10,629	9,05	»	»	»	17	18,1

Condensateur de rayon $r = 9,15$.

Épaisseur d'air e.	Capacité du condensateur C.	Nombre d'éléments n.	Hauteur h	Capacité de la pile P.	Rang de l'élément neutre observé.	Rang de l'élément neutre calculé.
mm 1,803	120,0	40	cm 25,0	6,82	3	3,15
3,543	70,9	»	»	»	5	4,51
7,086	39,8	»	»	»	6	6,85
24,21	21,2	»	»	»	12	10,8
1,803	120,0	60	38,6	3,65	5	5,03
3,543	70,9	»	»	»	8	7,52
7,086	39,8	»	»	»	12	11,7
24,21	21,2	»	»	»	19-20	18,4

L'accord est encore aussi complet qu'il est possible pour des déterminations aussi compliquées.

J'espère que ces expériences paraîtront une vérification suffisante de la théorie du potentiel, et je serais heureux si elles pouvaient contribuer, pour leur faible part, à répandre une théorie qui a pour elle l'avantage de l'exactitude et de la simplicité.

Qu'il me soit permis, en terminant, d'adresser tous mes remerciments à mon maître, M. Mascart, sous l'inspiration de qui ce travail a été entrepris, et dont les bienveillants conseils ne m'ont jamais fait défaut.

SUR QUELQUES QUESTIONS

QUI DÉPENDENT

DES DIFFÉRENCES FINIES OU MÊLÉES,

PAR M. ÉDOUARD COMBESCURE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

On sait qu'Euler a résolu, par des considérations diverses, plusieurs problèmes de Géométrie où il s'agit de déterminer une courbe plane d'après certaines relations qui sont données entre des points successifs de cette courbe et d'autres points situés à distance finie des premiers. Dans un important Mémoire, inséré au tome I du *Recueil des Savants étrangers*, Biot a repris quelques-uns de ces problèmes et les a rattachés à une méthode régulière de calcul. Poisson est revenu, à son tour (*Journal de l'École Polytechnique*, 13[e] cahier, p. 141), sur l'un de ces mêmes problèmes, en introduisant, conformément à une indication générale de Laplace (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1779), une variable auxiliaire dont la différence première est constante, substitution qui a, en particulier, pour avantage de permettre l'inversion des différentiations finie et infiniment petite. Dans le tome IX, 1[re] série, du *Journal de Liouville*, M. Puiseux a résolu complétement le problème qui a pour objet la détermination des courbes planes semblables à leurs développées correspondantes de l'ordre n. Le tome XI, 2[e] série, du même Journal renferme une solution particulière d'une question analogue, où la développée est remplacée par la première podaire. Enfin on trouve d'autres intéressants problèmes du même genre dans l'excellent *Traité des différences finies* de M. G. Boole.

Les différentes questions de Géométrie traitées jusqu'ici par les géomètres, et dont la solution dépend du calcul des différences finies ou mêlées, ont été uniquement empruntées (autant du moins qu'il m'ait été possible de m'en convaincre) à la Géométrie plane. Quand on veut

passer aux trois dimensions, on se trouve en présence de difficultés, la plupart du temps insurmontables, eu égard à l'état actuel de l'Analyse. J'ai résolu quelques-uns de ces nouveaux problèmes, relativement simples. Ils ont trait principalement à la détermination des courbes gauches, d'après diverses conditions de similitude, et à une certaine extension de la théorie au cas de plusieurs variables indépendantes.

Le premier paragraphe renferme quelques considérations générales en vue de ce dernier objet. Elles ne me paraissent nullement ressortir, comme pour le cas d'une seule variable, de ce que dit Laplace dans le Mémoire cité ou dans son grand Ouvrage sur les probabilités. J'ajoute, dans le § II, quelques remarques, qui n'ont peut-être pas été faites, sur divers points de la théorie, et particulièrement sur l'intégration d'une certaine classe d'équations linéaires aux différences mêlées. La question résolue au § III est, je crois, nouvelle. Quoiqu'elle ne dépende que des différences finies et ne présente pas de difficultés analytiques proprement dites, il m'a paru qu'elle pouvait offrir quelque intérêt géométrique. Dans le § IV, je reprends une question relative aux podaires, dans la solution générale de laquelle s'introduisent définitivement deux fonctions arbitraires périodiques. Il faut, sans doute, attribuer au rejet d'une fonction arbitraire, dans le cours de son élégante analyse, la solution si restreinte trouvée par M. Haton de la Goupillière dans le Recueil cité. Le § V est consacré à la solution d'un problème de Géométrie, que je crois encore nouveau. Sa solution complète est ramenée à l'intégration d'une équation linéaire, aux différences mêlées, que l'on peut faire rentrer dans la classe de celles dont il est question au § II. Enfin je m'occupe, dans le § VI, d'une extension analytique, qui ne paraît pas sans intérêt, d'un célèbre problème d'Euler relatif aux courbes planes et auquel il a été précédemment fait allusion. Ce dernier paragraphe fournit une application des considérations, nécessairement un peu vagues, développées au n° 4 du § I, et dont il peut, en conséquence, être considéré comme le complément naturel.

§ I. — *Remarques analytiques.*

1. Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on donne à ces variables des accroissements

finis quelconques $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, considérés comme indépendants, et que l'on désigne par $\Delta_1 f$, $\Delta_2 f, \ldots$ les accroissements partiels et correspondants de f, de sorte que

$$\begin{aligned}
\Delta_1 f &= f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n),\\
\Delta_2 f &= f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

l'accroissement total ou la différence totale, que je désignerai simplement par Δf, et dont l'expression immédiate est

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

pourra être représenté par la formule symbolique

$$(a) \qquad \Delta f = [(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)\ldots(1 + \Delta_n) - 1] f,$$

ainsi que cela résulte, par exemple, d'une formule de Laplace (*Théorie analytique des probabilités*, p. 74). Mais on peut voir ceci plus simplement, si l'on veut, de la manière suivante. Si l'on suppose la formule vraie pour le cas de n variables indépendantes, et que l'on vienne à introduire une nouvelle variable indépendante x_{n+1}, on aura, d'après la définition même de l'accroissement total Δf,

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} \Delta f + \Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n, x_{n+1} + \Delta x_{n+1})\\
- f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} + \Delta x_{n+1}),
\end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire, en désignant par $\Delta' f$ le nouvel accroissement total,

$$\Delta_{n+1} \Delta f + \Delta f = \Delta' f - \Delta_{n+1} f,$$

d'où

$$\Delta' f = \Delta_{n+1}(\Delta f + f) + \Delta f,$$

et, remplaçant Δf par la forme symbolique (a) qu'on suppose avoir lieu, il vient

$$\Delta' f = \Delta_{n+1}[(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)\ldots(1 + \Delta_n)] f + [(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)\ldots(1 + \Delta_n)] f - f,$$

c'est-à-dire

$$\Delta' f = [(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)\ldots(1 + \Delta_{n+1}) - 1] f.$$

De la formule (a) résulte, pour la différence totale, d'ordre p,

$$\Delta^p f = [(1+\Delta_1)(1+\Delta_2)\ldots(1+\Delta_n) - 1]^p f.$$

2. Lorsque les accroissements Δx_1, $\Delta x_2, \ldots$, Δx_n sont constants, auquel cas on peut leur attribuer une valeur commune égale à l'unité, l'équation

$$\Delta f = 0$$

est, d'après la formule (a), une équation linéaire aux différences finies partielles, de l'ordre n et à coefficients constants. On pourrait donc l'intégrer par les méthodes connues; mais il est évident que l'intégrale vraiment générale de cette équation particulière est une conséquence immédiate de la définition de la *différence totale*. Toute fonction f des n variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots$, x_n peut être regardée, en effet, comme une fonction de l'une de ces variables, x_1 par exemple, et des différences

$$\xi_2 = x_2 - x_1, \quad \xi_3 = x_3 - x_1, \ldots, \quad \xi_n = x_n - x_1,$$

de sorte que, en posant

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

l'équation

$$\Delta f = 0$$

revient à

$$\varphi(x_1 + 1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \varphi(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

équation qui montre que φ est une fonction arbitraire de x_1, $\xi_2, \ldots$, ξ_n, assujettie seulement à la condition d'être périodique par rapport à x_1, quelles que soient ξ_2, $\xi_3, \ldots$, ξ_n. Telle est la forme la plus générale, et en même temps la plus simple de l'intégrale de l'équation proposée. Mais rien n'empêche, si on le juge à propos, de faire figurer dans φ toutes les différences deux à deux des variables et, en outre, x_1, $x_2, \ldots$, x_n, pourvu que ces dernières variables y entrent séparément sous forme périodique.

On peut remarquer, à ce moment, que, lorsqu'on a à former l'accroissement total $\Delta^p f$, d'ordre p, si l'on substitue préalablement les variables $x_1 = t$, $\xi_2, \ldots$, ξ_n aux variables primitives x_1, $x_2, \ldots$, x_n, il n'y

aura, dans la transformée φ de f, qu'à s'occuper de la seule variabilité de t, à cause de la relation évidente

$$\Delta^p f = \Delta_t^p \varphi.$$

Il suit de là que l'intégrale générale de l'équation

$$\Delta^p f = 0$$

peut être représentée par

$$f = x_1^{p-1}\varphi_1 + x_1^{p-2}\varphi_2 + \ldots + x_1\varphi_{p-1} + \varphi_p,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions de la nature de la fonction φ, définie un peu plus haut à propos de l'intégrale de l'équation $\Delta f = 0$.

3. Lorsque les différences $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ sont des fonctions données quelconques des variables elles-mêmes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut, comme généralisation de l'indication de Laplace pour le cas d'une seule variable indépendante, substituer à ces variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'autres variables, pareillement indépendantes, telles que les accroissements Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ soient produits simultanément par l'accroissement, égal à 1, d'une seule des variables introduites. Si l'on désigne, en effet, par t cette variable particulière, et par $\varpi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varpi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$ les expressions données de $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$, on peut poser le système d'équations aux différences finies ordinaires

$$\Delta_t x_1 = \varpi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \Delta_t x_2 = \varpi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \quad \Delta_t x_n = \varpi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

dans lequel $\Delta_t x_i$ marque l'accroissement de x_i, qui répond à l'accroissement $\Delta t = 1$ de la nouvelle variable indépendante t, la seule jusqu'ici introduite. Or, en se plaçant à un point de vue tout à fait général, on sait qu'un pareil système comporte un système intégral formé de n équations finies entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, t et n constantes arbitraires indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En remplaçant ces constantes par des fonctions déterminées et distinctes de $(n-1)$ variables arbitraires $t_2, t_3, \ldots, t_n$, on tirera du système intégral des expressions de la forme

$$x_1 = f_1(t, t_2, \ldots, t_n), \quad x_2 = f_2(t, t_2, \ldots, t_n), \ldots, \quad x_n = f_n(t, t_2, \ldots, t_n);$$

et ce seront précisément là les formules requises pour le changement

des variables indépendantes, les nouvelles variables indépendantes étant $t, t_2, \ldots, t_n$.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que l'existence d'un système intégral renfermant n constantes arbitraires, invoquée ci-dessus, est fondée sur la considération connue que voici : si l'on pose

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_n = 0,$$

les F étant des fonctions données quelconques, indépendantes entre elles, des variables $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, et de n constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et que l'on représente par

$$F'_1 = 0, \quad F'_2 = 0, \ldots, \quad F'_n = 0$$

ce que deviennent ces équations lorsqu'on y écrit $t + 1$ au lieu de t et en même temps $x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n$ au lieu de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement, puis qu'on élimine $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre ces deux groupes d'équations, on obtiendra n équations résultantes, d'où l'on pourra déduire pour $\Delta_t x_1, \Delta_t x_2, \ldots, \Delta_t x_n$ des expressions en $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, lesquelles pourront coïncider avec n fonctions données quelconques de ces $n+1$ variables, à cause de la présence des n fonctions aussi quelconques $F_1, F_2, \ldots, F_n$, introduites dans le calcul.

Pour revenir à la question qui fait l'objet spécial du présent numéro, on peut remarquer que, si dans les expressions ci-dessus de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui sont censées servir au changement des variables indépendantes, on écrit, aux seconds membres, $t_2 - t, t_3 - t, \ldots, t_n - t$, au lieu de $t_2, t_3, \ldots, t_n$ respectivement, de sorte que, par exemple, on ait $x_1 = f_1(t, t_2 - t, t_3 - t, \ldots, t_n - t)$, et que l'on substitue ces nouvelles expressions dans une fonction donnée quelconque $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: la transformée $\varphi(t, t_2, \ldots, t_n)$ ainsi obtenue jouira évidemment de la propriété que son accroissement total $\Delta\varphi$, répondant à l'accroissement simultané, *un*, de toutes les variables, $t, t_2, \ldots, t_n$, sera équivalent à l'accroissement total Δf provenant des accroissements simultanés $\Delta x_1 = \varpi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \Delta x_n = \varpi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ce passage à des variables indépendantes, qui augmentent simultanément de *un*, peut offrir dans certains cas des avantages, au point de vue, par exemple, de la symétrie.

4. Lorsqu'on a m fonctions indéterminées $u, \ldots, v$ de n variables indépendantes $x, y, \ldots, z$ et que l'on a à faire intervenir dans le calcul les valeurs $x_1, y_1, \ldots, z_1$, de ces variables

$$x_1 = \varphi\left(x, y, \ldots, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2 u}{dx\,dy}, \cdots\right),$$

$$y_1 = \psi\left(x, y, \ldots, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2 u}{dx\,dy}, \cdots\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$z_1 = \chi\left(x, y, \ldots, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2 u}{dx\,dy}, \cdots\right),$$

où $\varphi, \psi, \ldots, \chi$ sont des fonctions données de $x, y, \ldots, z, u, \ldots, v$, et des dérivées $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \cdots$ jusqu'à un ordre déterminé, comme on peut toujours imaginer, à un point de vue purement théorique, que φ, $\psi, \ldots, \chi$ se réduisent finalement à des fonctions des seules variables indépendantes, $x, y, \ldots, z$, on peut aussi concevoir, conformément à ce qui a été dit au numéro précédent, que l'on ait introduit n nouvelles variables indépendantes $t, \theta, \ldots, \tau$, telles que, en regardant $x, y, \ldots, z$ comme des fonctions de ces nouvelles variables, $x_1, y_1, \ldots, z_1$ soient précisément les valeurs que prennent ces fonctions quand $t, \theta, \ldots, \tau$ y sont simultanément changés en $t+1, \theta+1, \ldots, \tau+1$, ou, si on le préfère, quand t seul y est changé en $t+1$. Alors les nouvelles valeurs $u_1, \ldots, v_1$ et celles de leurs dérivées partielles, qui étaient censées répondre au système de valeurs $x_1, y_1, \ldots, z_1$ des variables indépendantes primitives, pourront être regardées comme se rapportant directement au système $t+1, \theta+1, \ldots, \tau+1$, ou, si on le préfère, au système $t+1, \theta, \ldots, \tau$. En joignant les n équations, écrites ci-dessus, aux m équations qui doivent être données entre $x, y, \ldots, z, u, \ldots, v, \frac{du}{dx}, \cdots$ et entre les valeurs de ces diverses quantités qui répondent aux systèmes $(x_1, y_1, \ldots, z_1)$, $(x_2, y_2, \ldots, z_2), \ldots, (x_i, y_i, \ldots, z_i)$, déduits les uns des autres suivant la loi ci-dessus, on aura un système total de $m+n$ équations, aux différences mêlées partielles, entre les $m+n$ fonctions inconnues $x, y, \ldots, z, u, \ldots, v$ et les variables indépendantes actuelles $t, \theta, \ldots, \tau$. Il est clair qu'il conviendra généralement de rap-

porter dans ce système les dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$,... aux variables t, θ,..., τ, par les formules ordinaires du changement de variables indépendantes, quand les nouvelles variables introduites restent indéterminées.

Au reste, on pourrait dire simplement que l'on profite de l'indétermination des n fonctions qu'introduit tout changement implicite de n variables indépendantes pour remplir n conditions déterminées, à savoir ici que $x_1, y_1, \ldots, z_1$ soient précisément les valeurs de $x, y, \ldots, z$ qui répondent au système de valeurs $t+1$, $\theta+1, \ldots, \tau+1$, ou, si on le préfère, $t+1$, $\theta, \ldots, \tau$ des nouvelles variables indépendantes. Mais les considérations précédentes me paraissent, à différents égards, préférables et plus précises.

Dans tous les cas, il faut observer que les expressions définitives de $u, \ldots, v$ en $t\,\theta, \ldots, \tau$, doivent être telles, que les valeurs de $x_1 = \varphi$, $y_1 = \psi, \ldots, z_1 = \chi$ soient indépendantes entre elles, comme celles de $x, y, \ldots, z$. La supposition qu'il existe entre $x_1, y_1, \ldots, z_1$ une ou plusieurs relations déterminées changerait la nature de la question primitive et donnerait nécessairement lieu à diverses hypothèses ou discussions que je mettrai complétement de côté.

§ II. — *Suite des remarques analytiques.*

1. Soit un système d'équations différentielles ordinaires entre une variable indépendante t et les n fonctions $x, y, \ldots, z$ de cette variable

$$(1)\quad \frac{dx}{dt} = f(x, y, \ldots, z, t),\quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x, y, \ldots, z, t), \ldots,\quad \frac{dz}{dt} = \psi(x, y, \ldots, z, t),$$

où les seconds membres renferment la variable indépendante t sous forme périodique seulement. En supposant que ces mêmes seconds membres restent finis et continus lorsque t varie dans un intervalle dépassant l'unité (étendue de la période), $x, y, \ldots, z$ variant en même temps entre certaines limites; en désignant, de plus, par $x_1, y_1, \ldots, z_1$ les valeurs de $x, y, \ldots, z$ considérées actuellement comme des fonctions de t, qui répondent à la valeur $t+1$ de cette variable indépendante et

sont censées comprises dans les limites en question, on aura

$$(2)\ \frac{dx_1}{dt} = f(x_1, y_1, \ldots, z_1, t), \quad \frac{dy_1}{dt} = \varphi(x_1, y_1, \ldots, z_1, t), \ldots, \quad \frac{dz_1}{dt} = \psi(x_1, y_1, \ldots, z_1, t),$$

équations exactement de même forme que les équations (1). Si donc, $a, b, \ldots, c$ désignant des constantes arbitraires, on représente par

$$(3) \qquad x = \mathrm{F}(a, b, \ldots, c, t), \quad y = \Phi(a, b, \ldots, c, t), \ldots$$

les intégrales générales des équations (1), on obtiendra les intégrales générales des équations (2) en changeant simplement dans (3) les constantes $a, b, \ldots, c$, en d'autres $a + \Delta a$, $b + \Delta b, \ldots, c + \Delta c$ où Δa, $\Delta b, \ldots, \Delta c$ peuvent être considérés comme des fonctions données quelconques de $a, b, \ldots, c$. Mais comme $x_1, y_1, \ldots, z_1$ peuvent aussi se déduire de (3) en changeant t en $t + 1$, on aura des relations telles que

$$\mathrm{F}(a + \Delta a, b + \Delta b, \ldots, c + \Delta c, t) = \mathrm{F}(a, b, \ldots, c, t + 1).$$

Or, d'après le n° 3 du § I, on peut, au lieu de $a, b, \ldots, c$, introduire un autre système de constantes $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, telles que $\Delta a, \Delta b, \ldots, \Delta c$ soient produits simultanément par l'accroissement *un* attribué à une seule des nouvelles variables, γ par exemple, de sorte que, en changeant en même temps t en $-(t+1)$, la relation précédente équivaut à celle-ci

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \ldots, \gamma + 1, t + 1) = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \ldots, \gamma, t);$$

ce qui revient à dire que les intégrales générales des équations (1) peuvent toujours être considérées comme des fonctions de $n - 1$ constantes arbitraires et de $t - \tau$ (τ étant la $n^{\text{ième}}$ constante), ces fonctions contenant, en outre, sous forme périodique, t ou τ à volonté.

De là résulte une conséquence particulière pour le cas où les équations (1) sont linéaires; mais il est peut-être préférable d'établir le résultat d'une manière un peu différente.

2. Considérons l'équation linéaire de l'ordre n entre la fonction y et la variable indépendante x

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p\,\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + sy = 0,$$

dans laquelle les coefficients $p, \ldots, s$ sont supposés des fonctions périodiques de x. Soient $\xi, \eta, \ldots, \zeta$, n solutions particulières distinctes de cette équation. Si ξ, par exemple, vérifie l'équation quand x varie de x_0 à X, intervalle supérieur à une période, ξ_1 (expression de ξ quand on y écrit $x+1$ au lieu de x) sera aussi une solution particulière de la même équation, puisque celle-ci conserve la même forme quand on y change x en $x+1$; par conséquent, d'après la forme connue de l'intégrale générale de la proposée, ξ_1 sera nécessairement une fonction linéaire à coefficients constants de $\xi, \eta, \ldots, \zeta$. Si donc toutes les fonctions $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ sont propres, chacune en particulier, à vérifier l'équation différentielle dans tout l'intervalle de x_0 à X, on aura n équations linéaires à coefficients constants entre $\xi, \eta, \ldots, \zeta$; $\xi_1, \eta_1, \ldots, \zeta_1$. D'où l'on conclut, d'après la forme connue des intégrales d'un pareil système d'équations, que l'expression générale de y est

$$y = \varpi e^{\mu x} + \ldots + \omega e^{\rho x},$$

$\mu, \ldots, \rho$ étant des constantes et $\varpi, \ldots, \omega$ des fonctions périodiques de x, cette forme devant être modifiée de la manière connue dans le cas où l'on suppose la coïncidence d'un certain nombre des n exposants.

Si les fonctions $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ n'étaient pas propres à vérifier séparément la proposée dans le même intervalle $X - x_0$, supérieur à l'unité, la conclusion précédente pourrait être en défaut, puisqu'on ne pourrait plus affirmer l'existence d'un nombre égal à n d'équations linéaires entre $\xi, \eta, \ldots, \zeta$; $\xi_1, \eta_1, \ldots, \zeta_1$.

Si une fonction particulière ξ vérifie la proposée dans un intervalle supérieur à m périodes, c'est-à-dire en conservant dans cet intervalle sa forme analytique, et que cette fonction ξ ne soit pas périodique, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ constitueront généralement autant de solutions particulières nouvelles, et on pourra les faire intervenir à ce titre dans la proposition précédente.

La détermination des exposants $\mu, \ldots, \rho$ paraît exiger généralement l'intégration même de l'équation proposée. On peut facilement déterminer leur somme. En désignant, en effet, par Θ le déterminant des n solutions particulières $\xi, \eta, \ldots, \zeta$, c'est-à-dire en posant

$$\Theta = \Sigma \pm \left(\frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}} \frac{d^{n-2}\eta}{dx^{n-2}} \cdots \zeta \right),$$

on sait que

$$\Theta = e^{-\int p\,dx}.$$

Dans le cas présent, les n solutions particulières ξ, η,..., ζ sont de la forme $\varpi e^{\mu x}$, $\varphi\, e^{\nu x}$,..., $\omega\, e^{\rho x}$. La substitution dans le déterminant Θ donnera donc un résultat de la forme

$$\mathrm{A}\, e^{(\mu+\nu+\ldots+\rho)x},$$

A étant une fonction périodique; il faudra donc que la partie non périodique de l'intégrale $-\int p\,dx$ se réduise à $(\mu+\nu+\ldots+\rho)x$. Le coefficient de cette partie non périodique est représenté, en général, par $-\int_0^1 p\,dx$, en sorte que l'on aura

$$\mu+\nu+\ldots+\rho = -\int_0^1 p\,dx.$$

Il est clair qu'on pourrait augmenter l'un ou l'autre membre de $2k\pi\sqrt{-1}$, k étant un nombre entier quelconque; mais on peut admettre que la partie périodique qui en proviendrait est absorbée dans une ou plusieurs fonctions ϖ, φ,..., ω.

3. Il ne sera peut-être pas inutile d'entrer dans quelques détails sur la forme, qui vient d'être invoquée, de l'intégrale d'une fonction périodique. Soit

$$\mathrm{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

où $f(x)$ est une fonction périodique. On aura successivement

$$\mathrm{F}'(x) = f(x), \quad \mathrm{F}'(x+1) = f(x), \quad \mathrm{F}'(x+1) - \mathrm{F}'(x) = 0,$$

et, par suite,

$$\mathrm{F}(x+1) - \mathrm{F}(x) = k, \quad \mathrm{F}(x) = kx + \psi(x),$$

k étant une constante et $\psi(x)$ une fonction périodique. Comme $\mathrm{F}(x_0)$ est nulle, on aura

$$\mathrm{F}(x) = \psi(x) - \psi(x_0) + k(x - x_0), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{F}(x_0+1) = k,$$

c'est-à-dire

$$k = \int_{x_0}^{x_0+1} f(x)\,dx, \quad \text{ou} \quad k = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

en supposant que la fonction $f(x)$ ne devienne pas discontinue entre les limites x_0 et $x+1$ ou 0 et 1. Dans le cas d'une discontinuité quelconque, il faut nécessairement faire des conventions particulières pour chaque forme déterminée de fonction périodique, indépendamment des précautions ordinaires relatives au passage par l'infini. Ainsi, par exemple, si

$$f(x) = \pi \operatorname{tang} \pi x,$$

et qu'on prenne

$$F(x) = \pi \int_0^x \operatorname{tang} \pi x\,dx = -\log\cos\pi x,$$

on ne peut pas considérer $-\log\cos\pi x$ comme une fonction périodique dont l'amplitude de période est 1, ainsi que cela a lieu pour $\operatorname{tang}\pi x$; mais rien n'empêche d'écrire

$$F(x) = -\int_0^x \tfrac{1}{2} d.\log\cos^2\pi x = -\tfrac{1}{2}\log\cos^2\pi x,$$

et l'amplitude de période est $+1$ pour la fonction primitive comme pour la proposée. Plus généralement, quand on aura

$$y = \int_{x_0}^x \frac{f'(x)\,dx}{f(x)},$$

j'écrirai

$$y = \tfrac{1}{2}\log\left[\frac{f(x)}{f(x_0)}\right]^2,$$

ainsi que le font plusieurs géomètres, que $f(x)$ soit ou ne soit pas périodique. Cette forme intégrale a, en particulier, l'avantage de laisser subsister ou d'introduire dans certains problèmes de Géométrie des branches de courbe qui disparaîtraient sans cela et rompraient ainsi en pure perte la continuité géométrique.

Soit encore

$$y = \int_0^x \frac{dx}{1 + k\sin 2\pi x},$$

k étant une constante réelle dont la valeur est plus petite que l'unité. La dérivée $\frac{dy}{dx}$ est périodique, continue et finie pour toutes les valeurs réelles de x. Si l'on écrit

$$y = \frac{1}{\pi\sqrt{1-k^2}}\left(\text{arc tang}\,\frac{\text{tang}\,\pi x + k}{\sqrt{1-k^2}} - \text{arc tang}\,\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\right),$$

quand on change x en $x+1$, sans se préoccuper des valeurs intermédiaires, le second membre reprend exactement la même valeur; tandis que, en ayant égard à la variation continue de x dans le même intervalle, l'accroissement correspondant de y est évidemment $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$. La fonction y est donc de la forme $mx + \varpi(x)$, m étant une constante et $\varpi(x)$ une fonction périodique, ce qui résulte d'ailleurs du développement de $\frac{dy}{dx}$ suivant les puissances positives de k. Lorsqu'on suppose $k > 1$, on a

$$y = \frac{1}{4\pi\sqrt{k^2-1}}\log\left(\frac{\text{tang}\,\pi x + k - \sqrt{k^2-1}}{\text{tang}\,\pi x + k + \sqrt{k^2-1}}\,\frac{k+\sqrt{k^2-1}}{k-\sqrt{k^2-1}}\right)^2.$$

En suivant la variation continue de cette fonction, on reconnaît que y doit être actuellement considéré comme une fonction proprement périodique, sans partie proportionnelle à x; seulement cette fonction passe une fois par l'infini dans l'intervalle de chaque période, comme cela a lieu pour sa dérivée. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dy}{dx}\,dx$, traitée par les moyens usités, est indéterminée; et cette circonstance, ainsi que le passage par l'imaginaire, pourrait être considérée peut-être comme correspondant généralement, en vertu de quelque convention tacite, à l'absence du terme proportionnel à x dans l'intégrale indéfinie d'une fonction périodique; mais ceci n'est qu'une simple réflexion.

J'ajouterai, à propos de l'intégrale d'une fonction périodique, une dernière remarque qui peut être utile dans certaines circonstances. Si l'on considère l'intégrale indéfinie

$$\int P\varpi\,dx,$$

où P est une fonction quelconque de x et ϖ une fonction périodique de la même variable, et que l'on pose

$$\int \varpi\, dx = kx + \varpi_{(1)}, \quad \int \varpi_{(1)}\, dx = k_1 x + \varpi_{(2)}, \quad \int \varpi_{(2)}\, dx = k_2 x + \varpi_{(3)}, \ldots,$$

k, k_1, k_2,... étant des constantes et $\varpi_{(1)}$, $\varpi_{(2)}$, $\varpi_{(3)}$,... des fonctions périodiques, on trouve aisément, par le procédé de l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int P\varpi\, dx = {} & P[\varpi_{(1)} - k_1] - P'[\varpi_{(2)} - k_2] + P''[\varpi_{(3)} - k_3] - \ldots \\ & - (-1)^n P^{(n-1)}[\varpi_{(n)} - k_n] + (-1)^n P^{(n)} \varpi_{(n+1)} \\ & + k\int P\, dx - (-1)^n \int P^{(n+1)} \varpi_{(n)}\, dx,\end{aligned}$$

où les accents marquent les dérivées. En particulier, lorsque P est un polynôme du degré n, le dernier signe intégral disparaît, et l'on peut d'ailleurs effectuer la quadrature indiquée à l'avant-dernier terme.

4. Bien que les résultats établis aux numéros précédents du présent paragraphe soient soumis, comme on l'a vu, à diverses restrictions, la théorie de l'intégration des équations aux différences mêlées est jusqu'à ce jour si peu avancée qu'il semble y avoir intérêt à retenir les moindres remarques sur cet obscur et important sujet. Or c'est vers ce dernier objet que tendent, en grande partie, les résultats auxquels je viens de faire allusion.

Considérons les équations de la forme

$$(a) \qquad \Sigma_{i,j}\, p_{i,j} \frac{d^i y_j}{dx^i} = 0,$$

où le Σ s'étend à toutes les valeurs entières et positives de i et de j qui vérifient la condition $i + j \leq n$, n étant un nombre entier positif donné. Dans cette équation, y_j désigne toujours $f(x+j)$, en supposant que y est représenté par $f(x)$, et les coefficients $p_{i,j}$ sont supposés des fonctions périodiques de x. Si l'on fait, dans l'équation proposée,

$$y = ze^{\mu x},$$

z étant une fonction périodique et μ une constante indéterminée, on

obtiendra un résultat de la forme

$$(b) \qquad M z^{(n)} + N z^{(n-1)} + \ldots + Q z = 0,$$

les accents marquant les dérivées, et les coefficients M, N,..., Q étant des fonctions périodiques de x qui contiennent sous forme entière les puissances de μ et de e^{μ} jusqu'à la $n^{ième}$. D'après le n° 2, les n intégrales particulières distinctes de cette équation linéaire pourront être supposées, chacune en particulier, de la forme $\varpi_\mu e^{m_\mu x}$, où ϖ_μ est une fonction périodique qui dépend de μ, et m_μ un exposant constant qui dépend aussi de μ généralement. La fonction désignée par z devant être périodique, il faudra que

$$m_\mu = 0,$$

et c'est cette équation, généralement transcendante, qui fournira les valeurs convenables de μ. Une autre solution particulière de la même équation (b), telle que $\varphi_\mu e^{n_\mu x}$, donnera une autre série de solutions particulières dont les exposants seront fournis par l'équation

$$n_\mu = 0,$$

de sorte qu'on satisfera à l'équation proposée en prenant

$$y = \Sigma_\mu A_\mu \varpi_\mu e^{\mu x} + \Sigma_\mu B_\mu \varphi_\mu e^{\mu x} + \ldots + \Sigma_\mu C_\mu \omega_\mu e^{\mu x},$$

A_μ, B_μ,..., C_μ étant des constantes arbitraires et les Σ s'étendant respectivement aux racines des équations

$$m_\mu = 0, \quad n_\mu = 0, \ldots, \quad r_\mu = 0,$$

lesquelles admettront, chacune en particulier, une infinité de racines; mais cette dernière assertion ne doit être considérée que comme une induction fondée sur ce fait, que les exponentielles qui se trouvent entremêlées aux puissances de μ, pouvant être remplacées par leurs développements en série, les équations ci-dessus peuvent être assimilées généralement à des équations algébriques d'un degré infini.

5. Comme exemple de la méthode précédente d'intégration, considérons l'équation particulière

$$\Sigma_i a_i y_i = y'' - \frac{2\varpi'}{\varpi} y' + \left(\frac{2\varpi'^2}{\varpi^2} - \frac{\varpi''}{\varpi}\right) y,$$

où les a_i sont des coefficients constants en nombre quelconque, et ϖ une fonction périodique donnée. Si l'on fait

$$y = ze^{\mu x},$$

z étant supposé périodique, la substitution donnera

$$z'' + \left(2\mu - \frac{2\varpi'}{\varpi}\right)z' + \left(\frac{2\varpi'^2}{\varpi^2} - \frac{\varpi''}{\varpi} - 2\mu\frac{\varpi'}{\varpi} + \mu^2 - h\right)z = 0,$$

où, pour abréger,

$$h = \Sigma_i\, a_i\, e^{i\mu}.$$

En faisant

$$z = \varpi v,$$

cette équation se réduit simplement à

$$v'' + 2\mu v' + (\mu^2 - h)v = 0;$$

et l'on a en conséquence

$$z = \varpi e^{(-\mu+\sqrt{h})x} + \varpi e^{(-\mu-\sqrt{h})x}.$$

Il faudra déduire μ successivement des deux équations

$$\sqrt{h} = \mu, \quad \sqrt{h} = -\mu,$$

ou, si l'on veut ici, de l'équation unique, équivalant aux deux précédentes,

$$h = \mu^2,$$

et l'on en conclura

$$y = \varpi\Sigma_\mu\, A_\mu\, e^{\mu x}.$$

On peut remarquer que, dans cet exemple, les deux fonctions périodiques qui multiplient les exponentielles dans la précédente expression de z coïncident et ne dépendent point de μ; mais cela tient à la forme toute particulière de l'équation proposée. Quant aux racines μ, elles proviennent de deux équations vraiment distinctes. Pour prendre le cas le plus simple, supposons nuls tous les coefficients a_i, à l'exception de celui qui multiplie y_1, et dont la valeur sera égale à l'unité. Les deux équations d'où l'on doit déduire les racines μ seront actuellement

$$e^{\frac{\mu}{2}} = \mu, \quad e^{\frac{\mu}{2}} = -\mu.$$

A part la racine réelle unique qu'elle peut admettre, chacune de ces équations admet une infinité de racines imaginaires, dont la séparation est très-facile à effectuer, et à laquelle conséquemment je ne crois pas devoir m'arrêter. On pourra consulter sur ce point le Mémoire cité de M. Puiseux, où ce géomètre a effectué la séparation des racines pour une équation du même genre, quoique un peu plus compliquée.

6. Il y a un cas où il est possible de déterminer l'équation propre à fournir les diverses valeurs de μ, et d'obtenir en même temps l'expression de y. Ce cas se présente lorsque dans un terme quelconque de l'équation proposée la différentiation infiniment petite ne dépasse pas le premier ordre, de sorte que l'équation peut s'écrire

$$\Sigma_i p_{(i)} y_i + \Sigma_j q_{(j)} y'_j = 0,$$

$p_{(i)}$, $q_{(j)}$ étant toujours des fonctions périodiques, en nombre fini quelconque, et les accents indiquant les dérivées. Quand on fera

$$y = \xi = \varpi e^{\mu x},$$

on aura

$$\xi_1 = e^{\mu} \xi, \quad \xi_2 = e^{2\mu} \xi, \ldots,$$
$$\xi'_1 = e^{\mu} \xi', \quad \xi'_2 = e^{2\mu} \xi', \ldots,$$

de façon que l'équation proposée deviendra

$$\xi \Sigma_i p_{(i)} e^{i\mu} + \xi' \Sigma_j q_{(j)} e^{j\mu} = 0;$$

d'où par l'intégration on tirera immédiatement la valeur de ξ, et l'on aura, par suite,

$$\varpi = e^{-\int\left[\mu + \frac{\Sigma_i p_{(i)} e^{i\mu}}{\Sigma_j q_{(j)} e^{j\mu}}\right] dx}.$$

La fonction ϖ devant être périodique, il faudra généralement poser

$$\mu + \int_0^1 \frac{\Sigma_i p_{(i)} e^{i\mu}}{\Sigma_j q_{(i)} e^{j\mu}} dx = 0,$$

ce qui est précisément l'équation propre à fournir les diverses valeurs de μ. On aura ensuite

$$y = \Sigma_\mu A_\mu \varpi_\mu e^{\mu x},$$

les A_μ désignant des constantes arbitraires et ϖ_μ ce que devient successivement l'expression précédente de ϖ pour chacune des racines μ.

7. On peut, au lieu de l'équation particulière qui vient d'être examinée, considérer la suivante, d'une composition un peu différente,

$$\Sigma_i [p_{(i)} + x s_{(i)}] y_i + \Sigma_j q_{(j)} y'_j = 0,$$

$p_{(i)}$, $s_{(i)}$, $q_{(j)}$ étant encore des fonctions périodiques quelconques. En supposant ϖ et u des fonctions périodiques indéterminées, faisant,

$$y = \xi = \varpi u^x,$$

et observant que

$$\xi_h = u^h \xi, \quad \xi'_h = h u^{h-1} u' \xi + u^h \xi',$$

la substitution dans la proposée donne d'abord

$$\xi \{ \Sigma_i [p_{(i)} + x s_{(i)}] u^i + \Sigma_j j q_{(j)} u^{j-1} u' \} + \xi' \Sigma_j q_{(j)} u^j = 0.$$

Si l'on remplace dans cette équation ξ' par $\xi \left(\frac{\varpi'}{\varpi} + \log u + x \frac{u'}{u} \right)$, on obtient une transformée dont le premier membre renferme deux sortes de termes, savoir : des termes périodiques, et d'autres termes contenant x en facteur. Ces deux groupes de termes doivent disparaître séparément, et l'on a, en conséquence,

$$\frac{\varpi'}{\varpi} + \log u + \frac{\Sigma_i p_{(i)} u^i + \Sigma_j j q_{(j)} u^{j-1} u'}{\Sigma_j q_{(j)} u^j} = 0,$$

$$(a) \qquad \Sigma_i s_{(i)} u^i + u' \Sigma_j q_{(j)} u^{j-1} = 0.$$

Si de cette équation, non linéaire généralement, on peut tirer pour u une expression périodique renfermant une constante arbitraire α, la périodicité requise de ϖ exigera que l'on ait

$$\int_0^1 \left[\log u + \frac{\Sigma_i p_{(i)} u^i + \Sigma_j j q_{(j)} u^{j-1} u'}{\Sigma_j q_{(j)} u^j} \right] dx = 0,$$

équation d'où l'on devra déduire α, et l'on aura

$$y = \Sigma_\alpha A_\alpha \varpi_\alpha u_\alpha^x,$$

les A_α étant des constantes arbitraires et le Σ se rapportant aux racines

de l'équation précédente. ϖ_α, u_α désignent respectivement ce que deviennent les expressions trouvées pour ϖ et pour u quand on y remplace α par chacune des racines de la même équation successivement.

Par exemple, si l'on suppose que les coefficients $q_{(j)}$, $s_{(i)}$ soient tels que, pour toutes les valeurs considérées de j, on ait

$$q_{(j)} = jr_{(j)}, \quad s_{(j)} = r'_{(j)},$$

de sorte que l'équation proposée soit

$$\Sigma_i p_{(i)} y_i + x \Sigma_j r'_{(j)} y_j + \Sigma_j j r_{(j)} y'_j = 0,$$

l'équation propre à déterminer u sera

$$\Sigma_j [r'_{(j)} u^j + j r_{(j)} u^{j-1} u'] = 0;$$

le premier membre étant une différentielle exacte, on aura

$$\Sigma_j r_{(j)} u^j = \alpha.$$

En désignant par n la plus grande valeur de j, on déduira, de cette équation algébrique en u, n déterminations de u généralement; et ces n fonctions seront évidemment périodiques. Si on les représente par $u_{(1)}$, $u_{(2)}, \ldots, u_{(n)}$, il faudra déduire successivement les racines α des n équations

$$\int_0^1 \left[\log u_{(k)} + \frac{\Sigma_i p_{(i)} u^i_{(k)} + \Sigma_j j^2 r_{(j)} u^{j-1}_{(k)} u'_{(k)}}{\Sigma_j j r_{(j)} u^j_{(k)}} \right] dx = 0,$$

où $k = 1, 2, \ldots, n$.

8. J'ajouterai ici, pour ne pas y revenir, une dernière remarque sur un autre point de la théorie. En désignant par y une fonction quelconque de x et par y_1 ce que devient cette fonction quand x y est changée en $x+1$, l'équation

$$(\alpha) \qquad y_1 = y$$

est la définition immédiate d'une fonction périodique quelconque.

De même l'équation

$$(\beta) \qquad y_1 = -y$$

peut être regardée comme définissant immédiatement ce que j'appel-

lerai, pour abréger, une fonction périodique *impaire*. Les fonctions définies par (α) pourraient être appelées, par opposition, périodiques *paires*. Je les appellerai, en général, conformément à l'usage ordinaire, fonctions périodiques, réservant la qualification d'impaires pour les fonctions (β). Si l'on désigne par a une fonction particulière quelconque (par exemple $\sin \pi x$), périodique impaire, et que l'on pose

$$y = az,$$

l'équation (β) deviendra

$$z_1 = z;$$

de sorte qu'une fonction périodique impaire peut toujours être considérée comme le produit d'une fonction périodique paire par une fonction périodique impaire particulière. Mais il est aussi simple, comme on en verra des exemples, d'introduire directement dans le calcul les fonctions périodiques impaires, à peu près au même titre que les fonctions périodiques paires. Enfin on peut observer que $f(x)$ étant une fonction périodique impaire, finie et continue dans l'intervalle d'une période, l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ est égale à zéro, et l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$ est une fonction périodique impaire, ne contenant pas de partie proportionnelle à x. Il est évident qu'on pourrait introduire une distinction analogue, avec plus de variété bien entendu, pour le cas des fonctions de plusieurs variables indépendantes.

§ III. — *Des courbes composées individuellement de parties semblables.*

1. Les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque M d'une courbe étant supposées des fonctions d'une variable indépendante t, le point M_1 ou (x_1, y_1, z_1), obtenu en changeant dans ces fonctions t en $t + \Delta t$, Δt étant une fonction donnée de t, pourra être appelé le *point correspondant* de M. D'après ce qui a été dit au § I on peut toujours supposer Δt égal à l'unité. Cela posé, si l'on considère deux points quelconques M et M′ de la courbe et les points respectivement correspondants M_1 et M'_1, la condition que l'on s'impose ici est que les arcs MM′ et $M_1 M'_1$ soient semblables, quelles que soient les

valeurs t et t' de t qui répondent aux extrémités du premier. Cette condition se traduit évidemment par les trois équations

$$(a)\; mx_1 = ax + a'y + a''z, \quad my_1 = bx + b'y + b''z, \quad mz_1 = cx + c'y + c''z,$$

où a, b,... sont les cosinus de direction d'un nouveau système fixe d'axes rectangulaires ayant la même disposition que le premier, et où m est le rapport constant de similitude, positif ou négatif suivant que la similitude est directe ou inverse. On sous-entend aux seconds membres de ces équations trois constantes additionnelles. En posant, conformément à la méthode ordinaire,

$$x = \lambda m^{-t} e^{\rho t}, \quad y = \mu m^{-t} e^{\rho t}, \quad z = \nu m^{-t} e^{\rho t},$$

λ, μ, ν, ρ étant des constantes indéterminées, la substitution dans (a) fournira

$$(a - \sigma)\lambda + a'\mu + a''\nu = 0,$$
$$b\lambda + (b' - \sigma)\mu + b''\nu = 0,$$
$$c\lambda + c'\mu + (c'' - \sigma)\nu = 0;$$

où $\sigma = e^\rho$. L'élimination de λ, μ, ν donne une équation en σ dont les trois racines sont

$$1, \quad \cos\varepsilon + \sqrt{-1}\sin\varepsilon, \quad \cos\varepsilon - \sqrt{-1}\sin\varepsilon,$$

en posant

$$a + b' + c'' - 1 = 2\cos\varepsilon,$$

et l'on peut prendre

$$\lambda = a'' + c, \quad \mu = b'' + c', \quad \nu = 1 + c'' - a - b',$$

quand $\sigma = 1$, et

$$\lambda = c + a''\sigma, \quad \mu = c' + b''\sigma, \quad \nu = (c'' - 1)(1 + \sigma),$$

quand $\sigma = e^{\pm\varepsilon\sqrt{-1}}$.

Si l'on fait, pour abréger,

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\cos\varepsilon t - \mathrm{B}\sin\varepsilon t, \quad \mathrm{N} = \mathrm{A}\sin\varepsilon t + \mathrm{B}\cos\varepsilon t,$$

A, B, C étant trois fonctions arbitraires de t qui reprennent la même valeur quand t augmente de l'unité, on déduira des trois solutions par-

ticulières précédentes les intégrales générales des équations (a), à savoir

$$(b)\quad \begin{cases} x = m^{-1}[C(a''+c) + M(c + a''\cos\varepsilon) - Na''\sin\varepsilon], \\ y = m^{-1}[C(b''+c') + M(c' + b''\cos\varepsilon) - Nb''\sin\varepsilon], \\ z = m^{-1}[C(1 + c'' - a - b') + M(c'' - 1)(1 + \cos\varepsilon) - N(c'' - 1)\sin\varepsilon]. \end{cases}$$

On reconnaît facilement que les trois groupes de coefficients qui multiplient C, M, N dans ces formules peuvent être pris pour les cosinus de direction de trois axes rectangulaires, en introduisant toutefois un facteur numérique commun aux coefficients de C et un autre facteur numérique commun aux coefficients de M et N. En désignant par X, Y, Z les coordonnées relatives à ces nouveaux axes, et projetant x, y, z successivement sur chacun d'eux, on obtiendra

$$(c)\qquad X = m^{-1}R\cos(\varphi + \varepsilon t),\quad Y = m^{-1}R\sin(\varphi + \varepsilon t),\quad Z = m^{-1}H,$$

après avoir remplacé A et B, abstraction faite d'un même facteur numérique, par $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$ respectivement, R, φ, H étant trois fonctions arbitraires périodiques.

Lorsque m, que je suppose toujours positif, est égal à l'unité, les trois constantes qui sont censées ajoutées aux seconds membres des équations (a) ne peuvent pas être éliminées au moyen d'une solution particulière représentée elle-même par trois constantes : on les fait disparaître, dans ce cas, au moyen d'une substitution de la forme

$$x_0 = \alpha t + \alpha_1,\quad y_0 = \beta t + \beta_1,\quad z_0 = \gamma t,$$

$\alpha, \alpha_1, \ldots$ étant des constantes. On reconnaît aisément que α, β, γ doivent être proportionnels à $a'' + c$, $b'' + c'$, $1 + c'' - a - b'$; et dès lors en imaginant les quantités x_0, y_0, z_0 ajoutées respectivement aux seconds membres des équations (b) et projetant, comme précédemment, sur les trois nouveaux axes introduits, on obtient, abstraction faite des constantes additionnelles,

$$(d)\qquad X = R\cos(\varphi + \varepsilon t),\quad Y = R\sin(\varphi + \varepsilon t),\quad Z = H + ht,$$

R, H, φ étant des fonctions arbitraires périodiques, et h, ε des constantes quelconques.

On passe au cas de la similitude inverse en supposant, dans (c), m toujours positif et prenant pour R, H des fonctions périodiques impaires, φ étant toujours périodique pair. Seulement dans (d) h doit être supposé nul. On peut aussi dans les mêmes formules (c), (d) écrire $\varphi + n\pi t$ au lieu de φ, n étant un nombre entier quelconque, et supposer R toujours périodique pair; on sera dans le cas de la similitude directe ou dans celui de la similitude inverse, suivant que n sera pair ou impair, H étant toutefois impair dans ce dernier cas.

Lorsque ε est différent de zéro, si l'on fait

$$\varepsilon t + \varphi = \varepsilon\theta,$$

θ croîtra de *un* en même temps que t, et comme cette équation entraîne

$$t = \theta + \varpi(\theta),$$

ϖ étant une fonction périodique, toute fonction périodique de t deviendra, par cette substitution, une fonction périodique de θ, de même parité qu'avant la substitution. On voit, d'après cela, que, lorsque ε n'est pas nul, on peut dans les formules (c) et (d) supprimer, si l'on veut, la fonction φ; cette suppression n'enlève rien à la généralité des formules quand il s'agit simplement des différences finies, mais elle peut obliger à introduire des fonctions à sens multiple à cause des valeurs différentes de t, qui, dans l'équation

$$t + \frac{1}{\varepsilon}\varphi(t) = \theta,$$

peuvent répondre à une même valeur donnée de θ.

2. Il résulte du calcul ci-dessus qu'étant donnés deux systèmes semblables, situés d'une manière quelconque dans l'espace, on peut toujours les rapporter à trois axes rectangulaires tels qu'entre les coordonnées des points homologues (X, Y, Z), (X_1, Y_1, Z_1) on ait les relations constantes

$$mX_1 = X\cos\varepsilon - Y\sin\varepsilon, \quad mY_1 = X\sin\varepsilon + Y\cos\varepsilon, \quad mZ_1 = Z,$$

en sous-entendant, s'il le faut, des constantes additionnelles aux seconds membres. On aurait pu partir de cette propriété et simplifier

réciproquement le calcul primitif. Si l'on a, en effet, deux systèmes semblables (A, B, C,...), (A', B', C',...) et que l'on prenne deux points homologues quelconques O, O', on peut transporter parallèlement à lui-même le système (A', B', C',..., O') de manière à faire coïncider O' avec O. Puis, par une rotation autour d'un certain axe OI, toujours parallèle à lui-même, on peut l'amener à coïncider avec l'un des homologues de (A, B, C,..., O), construits avec le centre d'homothétie O. On voit que, dans le cas de la similitude directe, si m diffère peu de l'unité positive, le point O peut être transporté très-loin, ce qui explique la présence nécessaire de la constante qui est jointe à z quand on prend la direction OI pour axe des z et que l'on suppose m égal à l'unité.

3. En s'appuyant sur les considérations développées au § I, on peut, sans nouveau calcul, résoudre la même question géométrique à l'égard des surfaces. Les coordonnées x, y, z d'un point quelconque d'une surface étant supposées, en effet, des fonctions quelconques de deux paramètres arbitraires ξ, η, quelle que soit la loi de correspondance de deux points M ou (ξ, η) et M_1 ou $(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$, on peut substituer à ξ et η deux nouveaux paramètres indépendants t et θ, tels que $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$ soient produits simultanément par l'unique accroissement $\Delta t = 1$, θ ne variant pas. La condition géométrique de similitude fournissant d'ailleurs trois équations analogues à (a), il est clair qu'il suffit, pour avoir la solution générale du problème actuel, de supposer, dans les formules (c) et (d), que R, φ, H sont des fonctions arbitraires de θ et t, la dernière de ces variables entrant dans ces fonctions sous forme périodique; m, ε, h, restent toujours des constantes arbitraires. Ceci revient à considérer les surfaces cherchées comme engendrées par le mouvement de la courbe (c) dans les équations de laquelle on fait entrer, à part t, et d'une manière arbitraire, un nouveau paramètre indépendant θ répondant au déplacement ou à la déformation de cette courbe. Si l'on remplaçait θ par une fonction déterminée quelconque de t, on aurait, sur la surface en question, une certaine courbe; en changeant, après cela, t en $t + 1$, on obtiendrait sur la même surface une courbe semblable à la première.

Si l'on supposait que les fonctions R, φ, H dépendent arbitrairement

de trois paramètres t, θ, τ, le premier entrant toutefois dans ces fonctions sous forme périodique, les formules (c) et (d) répondraient à la décomposition de l'espace en portions semblables, c'est-à-dire que si l'on se donnait un nombre quelconque k de points, répondant à k systèmes de valeurs simultanées quelconques de ces paramètres, les valeurs de t étant, en particulier, $t_{(1)}, t_{(2)}, \ldots, t_{(k)}$, les k points obtenus en changeant $t_{(1)}, t_{(2)}, \ldots, t_{(k)}$ en $t_{(1)}+1, t_{(2)}+1, \ldots, t_{(k)}+1$, formeraient une figure semblable à la première.

Enfin je ferai remarquer que la méthode analytique, adoptée au début du présent paragraphe, pourrait s'appliquer au cas de la Géométrie à n dimensions. Le système des n équations analogues à (a), et répondant à cette généralisation, pourrait alors se traiter en faisant usage de la propriété des déterminants, établie par M. Brioschi au tome XIX, 1re série, du *Journal de Liouville;* et il ne serait peut-être pas sans intérêt de rechercher en particulier quel est le système le plus simple de n axes rectangulaires auxquels deux systèmes homologues peuvent être simultanément rapportés; mais je n'entrerai pas présentement dans d'autres détails sur ce sujet.

§ IV. — *Des courbes planes semblables à leurs $n^{\text{ièmes}}$ polaires correspondantes. — Sur un cas particulier relatif aux courbes gauches.*

1. En désignant par ρ et ω les coordonnées polaires d'un point quelconque M de la courbe plane cherchée, et observant que, d'après une propriété connue, les perpendiculaires abaissées du pôle sur les tangentes, qui correspondent aux podaires successives, font entre elles, en passant de l'une à la suivante, un même angle ν, les coordonnées θ et r du pied P de la $n^{\text{ième}}$ perpendiculaire seront données par les formules

$$(1) \qquad \theta = \omega - n\nu, \quad r = \rho \cos^n \nu.$$

Il convient, conformément à ce qu'a fait M. Puiseux dans une question analogue, de distinguer deux cas : 1° le cas où la $n^{\text{ième}}$ podaire peut être rendue homothétique à la courbe primitive (le pôle étant le centre d'homothétie) au moyen d'une rotation ε autour du pôle; 2° le cas où une pareille rotation la rend homothétique à une courbe symétrique de la courbe primitive relativement à l'axe polaire.

Premier cas. — On peut regarder ρ et ω comme des fonctions, jusqu'ici indéterminées, d'une variable auxiliaire t, et assujettir la fonction arbitraire qu'introduit le choix de cette variable à la condition que les coordonnées ρ_1 et ω_1 du point M_1 de la courbe cherchée, qui doit être l'homologue du point P, se déduisent de ρ et de ω respectivement en remplaçant simplement, dans ces dernières fonctions, t par $t+1$.

Cela étant, et en désignant par m le rapport constant de similitude, on aura les deux équations

$$(\alpha) \qquad \omega_1 = \theta + \varepsilon, \quad \rho_1 = mr,$$

ou bien, en ayant égard à (1) et écrivant à la suite une relation bien connue,

$$(2) \qquad \omega_1 = \omega - n\nu + \varepsilon, \quad \rho_1 = m\rho \cos^n\nu, \quad \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{tang}\nu\, d\omega.$$

La différentiation de la deuxième de ces équations donne

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1} = \frac{d\rho}{\rho} - n \operatorname{tang}\nu\, d\nu;$$

d'où, en ayant égard à la troisième et à celle qu'on en déduit par le changement de t en $t+1$, résulte

$$\operatorname{tang}\nu_1\, d\omega_1 = \operatorname{tang}\nu\, d\omega - n \operatorname{tang}\nu\, d\nu.$$

Le second membre de cette dernière équation revient, en vertu de la première (2), à $\operatorname{tang}\nu\, d\omega_1$; on a donc, en observant qu'on peut rejeter l'hypothèse de $d\omega_1$ égal à zéro,

$$\operatorname{tang}\nu_1 = \operatorname{tang}\nu, \quad \text{et, par suite,} \quad \nu_1 - \nu = k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque. On tire de là

$$(3) \qquad \nu = k\pi t + a,$$

a étant une fonction arbitraire périodique; ce qui transforme la première équation (2) dans

$$(\beta) \qquad \omega_1 - \omega = -nk\pi t - na + \varepsilon.$$

On en conclut, par l'intégration,

$$(4)\qquad \omega = -\tfrac{1}{2}nk\pi t^2 + (\tfrac{1}{2}nk\pi - na + \varepsilon)\,t + b,$$

b étant une nouvelle fonction arbitraire périodique.

D'après (3), la deuxième équation (2) peut s'écrire

$$(5)\qquad \rho_1 = m\rho\cos^n(k\pi t + a).$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$f(t) = m\cos^n(k\pi t + a),$$

de sorte que

$$(5')\qquad \rho_1 = \rho f(t),$$

$[f(t)]^2$ ou $f^2(t)$ sera une fonction proprement périodique, quelle que soit la parité de n et de k, et l'on pourra prendre, pour l'intégrale générale de l'équation (5) ou (5'),

$$(6)\qquad \rho = \pm A\,[f^2(t)]^{\frac{t}{2}},$$

où $f^2(t)$ est une quantité toujours positive, tant que f est supposée réelle, et où A est une fonction arbitraire périodique paire ou impaire.

On peut remarquer, à propos de cette intégrale ambiguë (6), où le signe $\pm$ doit être généralement conservé, que, si l'on considère t comme l'abscisse et ρ comme l'ordonnée d'une courbe, l'équation (5') déterminera sans ambiguïté les points qui se correspondent sur cette courbe, c'est-à-dire qui répondent respectivement aux valeurs t et $t+1$ de l'abscisse; et ceci a lieu quelle que soit la fonction $f(t)$, supposée toujours périodique paire ou impaire.

En substituant dans la troisième équation (2) les valeurs de ν, ω, ρ, fournies respectivement par (3), (4), (6), on obtient la relation

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\,\frac{d\log A^2}{dt} + \frac{1}{2}\log[m^2\cos^{2n}(k\pi t + a)] \\ &\qquad - \left(\frac{db}{dt} - na + \varepsilon + \frac{nk\pi}{2}\right)\operatorname{tang}(k\pi t + a) = 0, \end{aligned}\right.$$

qui a lieu entre des fonctions proprement périodiques seulement. Si l'on se donne arbitrairement A et b, on pourra en déduire a par la réso-

lution d'une équation transcendante, et il en résultera toujours pour a une forme périodique, comme cela doit être. Si l'on se donne A et a, on tirera de la relation précédente

$$\frac{db}{dt} = \mathrm{F}(t), \quad b = \int \mathrm{F}(t)\,dt,$$

où $\mathrm{F}(t)$ est périodique. Si cette quadrature ne donnait pas pour b une forme périodique, il faudrait égaler à zéro le coefficient de la partie proportionnelle à t, ce qui établirait une relation entre ε et les autres constantes.

En restreignant la généralité de la solution, on peut vérifier la relation (7) sans effectuer de quadrature ou sans résoudre une équation transcendante. Si l'on pose, en effet,

$$\tfrac{1}{2}\log \mathrm{A}^2 = \lambda \sin(k\pi t + a), \quad b = \lambda \cos(k\pi t + a),$$

λ étant une fonction indéterminée, la substitution de ces expressions dans l'équation (7) fournit

$$\begin{aligned} -\lambda = \big[\tfrac{1}{2}\cos(k\pi t + a)\log m^2 \cos^{m}(k\pi t + a) \\ + (na - \varepsilon - \tfrac{1}{2} nk\pi)\sin(k\pi t + a)\big] : \left(\frac{da}{dt} + k\pi\right), \end{aligned}$$

et il en résulte toujours pour $\frac{1}{2}\log \mathrm{A}^2$ et pour b des expressions proprement périodiques, quand on a adopté une pareille forme pour l'unique fonction arbitraire a qui subsiste actuellement dans la solution.

Lorsqu'on suppose a constant et k égal à zéro, l'équation (3) fournit pour ν une valeur constante : la courbe est donc une spirale logarithmique. Il semblerait cependant qu'il entre encore une fonction arbitraire dans les expressions (4) et (6) de ω et de ρ; mais il est facile de voir que, en tenant compte de (7), on peut éliminer t entre (4) et (6) et obtenir entre ρ et ω l'équation ordinaire de cette courbe. Au reste, rien ne s'oppose, dans le cas présent, à ce qu'on suppose A et b et, par suite, a constants, k étant toujours nul : les équations (4) et (6) appartiennent alors directement à la spirale logarithmique.

Second cas. — On a toujours les équations (1). Les équations (α) doivent être remplacées par

$$-\omega_1 = \theta + \varepsilon, \quad \rho_1 = mr,$$

et l'on a, par suite,

$$(2') \qquad \omega_1 + \omega - n\nu + \varepsilon = 0, \quad \rho_1 = m\rho\cos^n\nu, \quad \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{tang}\nu\, d\omega.$$

En suivant la même marche que dans le premier cas, on déduira de ces équations

$$\operatorname{tang}\nu_1 = -\operatorname{tang}\nu, \quad \nu_1 + \nu = k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque. Si l'on fait

$$(3') \qquad \nu = \frac{k\pi}{2} + c, \quad \text{et, par suite,} \quad \nu_1 = \frac{k\pi}{2} + c_1,$$

l'équation précédente deviendra

$$c_1 + c = 0;$$

en sorte que c est une fonction arbitraire périodique impaire. On tire ensuite de la première (2′)

$$\omega_1 + \omega = \frac{nk\pi}{2} - \varepsilon + nc,$$

et, en intégrant,

$$(4') \qquad \omega = \frac{nk\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - nct + g,$$

g étant une fonction arbitraire périodique impaire. En faisant

$$f(t) = m\cos^n\left(\frac{k\pi}{2} + c\right),$$

et observant que $f^2(t)$ est toujours une fonction périodique paire, on aura

$$(6') \qquad \rho = \pm A[f^2(t)]^{\frac{t}{2}},$$

A étant une fonction arbitraire périodique quelconque. Les fonctions A, c, g devront vérifier la condition

$$(7') \qquad \frac{1}{2}\frac{d\log A^2}{dt} + \frac{1}{2}\log f^2(t) - \left(\frac{dg}{dt} - nc\right)\operatorname{tang}\left(\frac{k\pi}{2} + c\right) = 0,$$

qui a lieu entre des quantités de même nature, le dernier terme étant le produit de deux fonctions périodiques impaires. Cette équation donne

lieu à quelques remarques analogues à celles du cas précédent. On aura, par exemple,

$$\frac{dg}{dt} = \mathrm{F}(t), \quad g = \int \mathrm{F}(t)\,dt,$$

$\mathrm{F}(t)$ étant une fonction périodique impaire, et l'intégration fournira généralement pour g une fonction de même nature.

L'analyse qui vient d'être développée, soit dans le premier, soit dans le second cas, peut être légèrement modifiée et simplifiée. Quand on est arrivé à l'équation (3), on peut former tout de suite l'équation (5) et, par suite, l'équation (6). La troisième (2) donne alors immédiatement

$$\omega = \int \cot\nu \frac{d\rho}{\rho},$$

et l'on peut reconnaître que cette expression de ω satisfait à l'équation (β). On en tire effectivement

$$d\omega = \cot\nu \frac{d\rho}{\rho},$$

et, par suite,

$$d\omega_1 - d\omega = \cot\nu_1 \frac{d\rho_1}{\rho_1} - \cot\nu \frac{d\rho}{\rho} = \cot\nu \left(\frac{d\rho_1}{\rho_1} - \frac{d\rho}{\rho}\right);$$

mais, d'après (5), on a

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{df(t)}{f(t)},$$

et, en mettant pour $f(t)$ ce que ce signe représente, on obtient

$$d(\omega_1 - \omega) = -n\left(k\pi + \frac{da}{dt}\right) dt,$$

ce qui est précisément la différentielle de l'équation (β). Une modification analogue peut être faite dans le second cas.

2. Les coordonnées rectangulaires x, y, z du pied P de la perpendiculaire, abaissée de l'origine sur la tangente au point (x, y, z) d'une courbe quelconque (C), sont données par les formules

$$(1) \qquad \mathrm{x} = x - \frac{r\,dr}{ds}\frac{dx}{ds}, \quad \mathrm{y} = y - \frac{r\,dr}{ds}\frac{dy}{ds}, \quad \mathrm{z} = z - \frac{r\,dr}{ds}\frac{dz}{ds},$$

dans lesquelles

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Si l'on exige que les courbes (C) et (P) soient semblables, l'origine étant le centre de similitude, en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point de la courbe (C), qui est l'homologue du point P, on devra avoir, d'après ce qui a été dit au n° 2 du § III,

$$\mathrm{x} = m(x_1 \cos\varepsilon - y_1 \sin\varepsilon), \quad \mathrm{y} = m(x_1 \sin\varepsilon + y_1 \cos\varepsilon), \quad \mathrm{z} = m z_1,$$

le second membre devant être augmenté d'une constante si l'on suppose m égal à l'unité positive. Les coordonnées x, y, z étant censées des fonctions d'une variable indépendante t, on pourra regarder x, y, z comme étant les valeurs de ces fonctions qui répondent à la valeur $t+1$ de la variable indépendante. Cela posé, si l'on fait

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \lambda \frac{r\,dr}{dt}, \tag{2}$$

λ étant une fonction indéterminée, l'élimination de x, y, z entre les deux groupes précédents d'équations fournira immédiatement

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda[x - m(x_1 \cos\varepsilon - y_1 \sin\varepsilon)], \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda[y - m(x_1 \sin\varepsilon + y_1 \cos\varepsilon)], \\ \frac{dz}{dt} &= \lambda(z - m z_1]. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

En adoptant les coordonnées semi-polaires

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega, \quad z = z,$$

ces équations pourront être remplacées par les suivantes :

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda(\rho - m\rho_1 \cos\theta), \quad \frac{d\omega}{dt} = \lambda\left(-\frac{m\rho_1}{\rho}\sin\theta\right), \quad \frac{dz}{dt} = \lambda(z - m z_1), \tag{4}$$

où, pour abréger,

$$\theta = \omega_1 - \omega + \varepsilon.$$

L'élimination des dérivées, au moyen de (4), transforme (2) dans

$$zz_1 - mz_1^2 + \rho\rho_1 \cos\theta - m\rho_1^2 = 0. \tag{5}$$

En faisant la somme des carrés de (1) et ayant égard à (2), on obtient

$$\frac{r\,dr}{dt} = \lambda(r^2 - m^2 r_1^2), \tag{4'}$$

équation qui peut être regardée comme une conséquence des quatre équations (4), (5), lesquelles suffisent pour la complète détermination des quatre fonctions inconnues ρ, ω, z, λ. En désignant toujours par des indices les valeurs de ces fonctions, qui répondent aux valeurs $t+1$, $t+2$,... de la variable indépendante, la différentiation de l'équation (5) et l'élimination ultérieure des dérivées, au moyen de (4), fournissent une équation dans laquelle l'ensemble des termes qui multiplient λ se réduit précisément au premier membre de (5) et qui, après la suppression de ces termes et la division par λ_1, revient à

$$\left\{\begin{aligned} &zz_1 - 2mz_1^2 + 2m^2 z_1 z_2 - 2m\rho_1^2 - mzz_2 \\ &\qquad + \rho\rho_1\cos\theta + 2m^2\rho_1\rho_2\cos\theta_1 - m\rho\rho_2\cos(\theta+\theta_1) = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Des équations (5) et (6) on déduit

$$\cos\theta = \frac{mr_1^2 - zz_1}{\rho\rho_1}, \quad \cos\theta_1 = \frac{mr_2^2 - z_1 z_2}{\rho_1\rho_2}, \quad \cos(\theta+\theta_1) = \frac{2m^2 r_2^2 - r_1^2 - zz_2}{\rho\rho_2}, \tag{7}$$

ce qui, substitué dans l'identité

$$\cos^2\theta + \cos^2\theta_1 + \cos^2(\theta+\theta_1) - 2\cos\theta\cos\theta_1\cos(\theta+\theta_1) - 1 = 0,$$

fournit, après avoir remplacé ρ^2 par $r^2 - z^2$ et opéré des réductions, une équation que l'on peut écrire sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{u_1 - m^2 u_2}{u_2}(u_2 z - 2mu_2 z_1 + u_1 z_2)^2 \\ &\quad + (uu_2 - u_1^2)\left(z_1^2 + \frac{u_1}{u_2}z_2^2 - 2mz_1 z_2 + m^2 u_2 - u_1\right) = 0, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

en posant

$$r^2 = u.$$

Il faut rapprocher de cette équation l'équation (4') ou

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dt} = \lambda(u - m^2 u_1), \tag{9}$$

et, en y joignant la troisième (4), on a trois équations propres à déterminer u, z, λ. On peut en déduire une équation aux différences mêlées ne renfermant qu'une fonction inconnue; mais l'équation, homogène et non linéaire, à laquelle on serait conduit, m'a paru devoir rentrer dans une classe si peu intégrable, par des moyens jusqu'ici quelconques, que je me suis borné à poursuivre le calcul dans un cas particulier qu'il faudrait d'ailleurs examiner avant d'aborder le cas général. Ce cas particulier correspond à l'hypothèse

$$uu_2 - u_1^2 = 0. \tag{10}$$

L'équation (8) exige alors que l'on ait

$$u_2 z - 2mu_2 z_1 + u_1 z_2 = 0; \tag{11}$$

car si l'on supposait nul le facteur $u_1 - m^2 u_2$, et par conséquent aussi $u - m^2 u_1$, $\frac{du}{dt}$ serait nul : r serait donc constant, c'est-à-dire que la courbe cherchée serait sphérique, circonstance qu'on peut ici exclure. Bien que l'on ait actuellement une équation de plus qu'il n'y a de fonctions à déterminer, le cas particulier dont il s'agit en ce moment admet une solution qui présente une certaine généralité relative. En faisant, pour un instant,

$$\frac{u_1}{u} = v,$$

l'équation (10) revient à

$$v_1 - v = 0,$$

c'est-à-dire que v est une fonction arbitraire périodique que je désignerai par a^2. On a donc, par l'intégration immédiate de l'avant-dernière équation,

$$r^2 = A^2 (a^2)^t, \tag{12}$$

A^2 étant une fonction arbitraire périodique. L'équation (10) devient, par suite,

$$z_2 - 2ma^2 z_1 + a^2 z = 0.$$

Cette équation, intégrée par la méthode ordinaire des exponentielles, fournit

$$z = \mathrm{B}b^t + \mathrm{C}c^t, \tag{13}$$

en posant

$$b = ma^2 + a\sqrt{m^2a^2 - 1}, \quad c = ma^2 - a\sqrt{m^2a^2 - 1}, \tag{14}$$

et en désignant par B et C deux fonctions arbitraires périodiques. Maintenant il faudra satisfaire à la condition

$$\lambda = \frac{\frac{dz}{dt}}{z - mz_1} = \frac{\frac{r\,dr}{dt}}{r^2 - m^2r_1^2}, \tag{15}$$

résultant de (9) et de la troisième (4). En substituant au dernier membre la valeur (12) de r^2, on aura

$$\lambda = \frac{\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}} + \log a + t\frac{a'}{a}}{1 - m^2a^2}, \tag{16}$$

les accents indiquant les dérivées. On a ensuite, d'après (13) et (14),

$$z - mz_1 = \mathrm{B}(1 - mb)b^t + \mathrm{C}(1 - mc)c^t,$$

$$1 - mb = -\frac{b}{a}\sqrt{m^2a^2 - 1}, \quad 1 - mc = \frac{c}{a}\sqrt{m^2a^2 - 1},$$

et, en substituant dans le deuxième membre de (15), il vient

$$\lambda = \frac{(\mathrm{B}' + \mathrm{B}\log b)b^t + (\mathrm{C}' + \mathrm{C}\log c)c^t + (\mathrm{B}b^{t-1}b' + \mathrm{C}c^{t-1}c')t}{(-\mathrm{B}bb^t + \mathrm{C}cc^t)\frac{1}{a}\sqrt{m^2a^2 - 1}}.$$

Cette expression de λ devant coïncider avec la précédente, il faut d'abord que l'on ait

$$\frac{a(\mathrm{B}b^{t-1}b' + \mathrm{C}c^{t-1}c')}{\mathrm{B}bb^t - \mathrm{C}cc^t} = \frac{\frac{a'}{a}}{\sqrt{m^2a^2 - 1}},$$

égalité qui exige que

$$\frac{a^2b'}{b^2} = -\frac{a^2c'}{c^2} = \frac{a'}{\sqrt{m^2a^2 - 1}}.$$

Or ces conditions sont identiques en vertu des relations

$$\frac{1}{b} = m - \sqrt{m^2 - \frac{1}{a^2}}, \quad \frac{1}{c} = m + \sqrt{m^2 - \frac{1}{a^2}}.$$

Il faut de plus, pour la coïncidence des deux expressions de λ, que

$$\frac{a(B' + B\log b)b' + a(C' + C\log c)c'}{Bbb' - Ccc'} = \frac{\frac{A'}{A} + \log a}{\sqrt{m^2a^2 - 1}},$$

et, par conséquent,

$$\frac{a(B' + B\log b)}{Bb} = -\frac{a(C' + C\log c)}{Cc} = \frac{\frac{A'}{A} + \log a}{\sqrt{m^2a^2 - 1}};$$

d'où

$$(17)\qquad \frac{B'}{B} = \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{A'}{A} + \log a\right)}{\sqrt{m^2a^2 - 1}} - \log b, \quad \frac{C'}{C} = -\frac{\frac{c}{a}\left(\frac{A'}{A} + \log a\right)}{\sqrt{m^2a^2 - 1}} - \log c.$$

L'addition de ces deux équations fournit

$$(18)\qquad \frac{B'}{B} + \frac{C'}{C} = \frac{2A'}{A}, \quad \text{et, par suite,} \quad BC = kA^2,$$

k étant une constante arbitraire. Si l'on se donne arbitrairement A et a, la première (17) fournira B par une quadrature, et la dernière (18) donnera tout de suite C. Si l'on se donne arbitrairement A et B, et par suite C, on pourra déduire a de l'une ou l'autre des équations (17), qui renferment cette quantité sous forme finie. Connaissant actuellement r et z, et par conséquent ρ, la première (7) donne immédiatement θ; et il est facile de s'assurer que, en vertu des expressions trouvées pour ces quantités, et de celle (16) de λ, la première (4) est identique. On tirera enfin de la deuxième (4)

$$(19)\qquad \omega = -m\int \lambda \frac{\rho_1}{\rho} \sin\theta \, dt;$$

mais il est nécessaire de faire voir que cette valeur de ω vérifie la relation

$$\theta = \omega_1 - \omega + \varepsilon,$$

qui fait suite aux équations (4). Or, si l'on différentie cette relation et que l'on substitue ensuite la précédente valeur de ω, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} - \frac{d\omega}{dt} = m\frac{\lambda\rho_1}{\rho}\sin\theta - m\frac{\lambda_1\rho_2}{\rho_1}\sin\theta_1,$$

ou bien

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = m\frac{\lambda_1\rho_2}{\rho_1}\sin\theta_1\sin\theta - m\frac{\lambda\rho_1}{\rho}\sin^2\theta;$$

en mettant pour $\cos\theta$ sa valeur (7), effectuant, au premier membre, les différentiations, et ayant égard à (4′), ainsi qu'à la première et à la troisième (4), cette équation devient identique. Ainsi la solution est représentée par l'ensemble des équations (12), (13), (14), (17), (18) et (19); elle renferme finalement, comme on voit, deux fonctions arbitraires périodiques.

On peut toujours supposer a une fonction réelle. Tant que a^2 est supérieur à $\frac{1}{m^2}$, b et c sont réels, et il en est de même de B et C. Lorsque a^2 est inférieur à $\frac{1}{m^2}$, b et c sont imaginaires conjugués, et par suite aussi B et C, de sorte que z est toujours réel. Si l'on fait

$$a = \frac{1}{m}\,\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2},$$

on aura

$$b = \frac{1}{2m}(1+e^{2\varphi}), \quad c = \frac{1}{2m}(1+e^{-2\varphi})$$

et l'on pourra donner à φ des valeurs réelles quelconques ou des valeurs imaginaires de la forme $\varphi\sqrt{-1}$. Ces deux systèmes de valeurs correspondent aux deux cas qui viennent d'être signalés à l'instant.

L'un des exemples les plus simples s'obtient naturellement en supposant a, A, B, C des constantes arbitraires. Alors l'une ou l'autre des équations (17) établit entre a et m la relation finie et transcendante

$$\log a - \sqrt{m^2a^2-1}\,\log b = 0,$$

b ayant toujours la valeur (14). Je ne m'arrêterai pas à la discussion de cette courbe particulière.

Enfin on pourrait déduire de l'analyse précédente ce qui est relatif

aux courbes planes, en considérant ici la première podaire. Mais si l'on voulait traiter la question par cette méthode, le plan simple serait de remonter aux équations (4) et (5), et d'y faire tout de suite z égal à zéro. Le reste du calcul s'achèverait sans peine, et il ne différerait pas essentiellement de celui qui a été ci-dessus développé spécialement pour le cas dont il s'agit.

§ V. — *Des courbes semblables aux lieux correspondants des centres des sphères osculatrices.*

1. Si l'on désigne par α, β, γ; ξ, η, ζ; λ, μ, ν les angles qui déterminent, par rapport à trois axes rectangulaires fixes, les directions respectives de la tangente, du rayon de courbure et de l'axe du plan osculateur, au point (x, y, z) d'une courbe quelconque, on a les quatre groupes ordinaires de formules

$$(1)\qquad \begin{cases} dx = \cos\alpha\, ds, & d\cos\alpha = \cos\xi\, d\sigma, \\ d\cos\lambda = \cos\xi\, d\tau, & d\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau, \end{cases}$$

où ds, $d\sigma$, $d\tau$ représentent la différentielle de l'arc, l'angle de contingence et l'angle de torsion. En posant

$$(d\cos\xi)^2 + (d\cos\eta)^2 + (d\cos\zeta)^2 = d\sigma^2 + d\tau^2 = dv^2,$$

on tire de ces relations

$$d\,d\cos\xi = -\cos\xi\, dv^2 - \cos\alpha\, d\,d\sigma - \cos\lambda\, d\,d\tau,$$

et, par suite,

$$(d\,d\cos\xi)^2 + (d\,d\cos\eta)^2 + (d\,d\cos\zeta)^2 = dv^4 + (d\,d\sigma)^2 + (d\,d\tau)^2 = (d\,d\rho)^2,$$

dv et $d\,d\rho$ étant introduits auxiliairement. Si l'on considère comme connues ces deux quantités et qu'on pose

$$(2)\qquad d\sigma = dv\sin\varphi, \quad d\tau = dv\cos\varphi,$$

on aura, pour déterminer φ, l'équation

$$(3)\qquad d\varphi = \frac{1}{dv}\sqrt{(d\,d\rho)^2 - (d\,dv)^2 - dv^4} = dv\sqrt{\frac{1}{R^2} - 1} = dv \operatorname{tang} i,$$

R désignant le rayon de courbure de la courbe sphérique qui aurait pour coordonnées rectangulaires $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, et i étant l'inclinaison de ce rayon sur le plan de la tangente sphérique correspondante. Lorsque ces trois cosinus sont connus, on peut déterminer α, β, γ; λ, μ, ν au moyen des formules

$$(4) \qquad -\cos\alpha\, d\frac{d\sigma}{d\tau} = d\,\frac{d\cos\xi}{d\tau} + \cos\xi\,\frac{dv^2}{d\tau},$$

$$(5) \qquad -\cos\lambda\, d\frac{d\tau}{d\sigma} = d\,\frac{d\cos\xi}{d\sigma} + \cos\xi\,\frac{dv^2}{d\sigma},$$

que l'on déduit des expressions ci-dessus de $d\cos\xi$ et $dd\cos\xi$, en excluant le cas où $\frac{d\sigma}{d\tau}$ est constant, c'est-à-dire le cas des hélices, qui doit être et sera examiné à part dans ce qui suit.

Enfin je rappellerai qu'en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de la sphère osculatrice relative au point (x, y, z), par ds_0, $d\sigma_0$, $d\tau_0$ la différentielle de l'arc, l'angle de contingence et l'angle de torsion de l'arête de rebroussement (x_0, y_0, z_0) de la surface polaire, on a les relations

$$(6) \qquad x_0 = x + \mathrm{R}\cos\xi - \frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\cos\lambda,$$

$$(7) \qquad dx_0 = \mp\, ds_0 \cos\lambda,$$

$$(8) \qquad d\tau = d\sigma_0, \quad d\tau_0 = d\sigma,$$

$$(9) \qquad ds_0 = \pm\left(\mathrm{R}\, d\tau + d\,\frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\right),$$

dans lesquelles ds_0 doit avoir le même signe que ds. (*Voir* l'excellent *Cours de Calcul différentiel et intégral* de M. J.-A. Serret, t. I, p. 430 et suiv.)

2. Cela posé, si l'on s'impose la condition que la courbe $(x_0 y_0 z_0)$ soit semblable à la courbe (xyz), en nommant x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point de cette dernière courbe, qui est l'homologue du point $(x_0 y_0 z_0)$, on pourra toujours, d'après une remarque précédemment faite, supposer aux axes une position telle, que l'on ait

$$(10) \qquad mx_0 = x_1\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon, \quad my_0 = -x_1\sin\varepsilon + y_1\cos\varepsilon, \quad mz_0 = z_1,$$

en sous-entendant, s'il le faut, aux seconds membres des constantes additionnelles.

La différentiation de ces équations, en observant que $m\,ds_0$ est égal à ds_1, et ayant égard à (1) et à (7), fournit

$$(11)\qquad \begin{cases} \mp \cos\lambda = \cos\alpha_1 \cos\varepsilon + \cos\beta_1 \sin\varepsilon, \\ \mp \cos\mu = -\cos\alpha_1 \sin\varepsilon + \cos\beta_1 \cos\varepsilon, \\ \mp \cos\nu = \cos\gamma_1. \end{cases}$$

En faisant attention que $d\sigma_0$ est ici égal à $d\sigma_1$, et que, par suite, d'après (8),

$$(12)\qquad d\tau = d\sigma_1,$$

la différentiation des précédentes équations donne, en faisant toujours usage de (1),

$$(13)\qquad \begin{cases} \mp \cos\xi = \cos\xi_1 \cos\varepsilon + \cos\eta_1 \sin\varepsilon, \\ \mp \cos\eta = -\cos\xi_1 \sin\varepsilon + \cos\eta_1 \cos\varepsilon, \\ \mp \cos\zeta = \cos\zeta_1, \end{cases}$$

d'où, en différentiant et faisant la somme des carrés, résulte d'abord

$$(14)\qquad dv_1 = \pm\, dv,$$

le signe ambigu n'ayant pas jusqu'ici de dépendance nécessaire avec les précédents.

L'intégration des équations (13) rentre, comme cas particulier, dans celle des équations considérées au § III; mais on peut aussi, si l'on veut, les intégrer directement comme il suit, en sous-entendant toujours que toutes les variables introduites sont des fonctions d'une certaine variable indépendante t dont la différence constante est l'unité, et employant les indices 1, 2,... pour indiquer les valeurs des fonctions qui répondent aux valeurs $t+1$, $t+2$, ... de cette variable indépendante. La troisième (13) montre d'abord que

$$\zeta = n\pi t + \psi,$$

ψ étant une fonction arbitraire périodique et n un nombre entier quelconque, impair dans le cas du signe supérieur, pair pour le cas du signe inférieur. Puis, en posant

$$\cos\xi = \sin\zeta \cos\omega, \quad \cos\eta = \sin\zeta \sin\omega,$$

les deux premières (13) deviennent

$$\mp \sin\zeta = \sin\zeta_1 \frac{\cos(\omega_1 - \varepsilon)}{\cos\omega}, \quad \mp \sin\zeta = \sin\zeta_1 \frac{\sin(\omega_1 - \varepsilon)}{\sin\omega},$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}(\omega_1 - \varepsilon) = \operatorname{tang}\omega,$$

et, par suite,

$$\omega_1 - \omega = n'\pi + \varepsilon, \quad \omega = (n'\pi + \varepsilon)t + \varpi,$$

n' étant un nombre entier quelconque et ϖ une fonction périodique arbitraire. On satisfera à la condition relative à l'ambiguïté des signes en prenant toujours n' pair, et supposant n impair ou pair suivant que, dans les premiers membres de (13), on doit adopter les signes supérieurs ou les signes inférieurs. On aura ainsi, sous ces conditions,

$$(15) \quad \begin{cases} \cos\xi = \sin(n\pi t + \psi)\cos(\overline{n'\pi + \varepsilon}\, t + \varpi), \\ \cos\eta = \sin(n\pi t + \psi)\sin(\overline{n'\pi + \varepsilon}\, t + \varpi), \\ \cos\zeta = \cos(n\pi t + \psi). \end{cases}$$

En absorbant $n'\pi$ dans ε, supposé différent de zéro, on peut encore adopter les formules équivalentes

$$(15') \quad \cos\xi = \sqrt{1-c^2}\cos(\varepsilon t + \varpi), \quad \cos\eta = \sqrt{1-c^2}\sin(\varepsilon t + \varpi), \quad \cos\zeta = c,$$

c étant une fonction arbitraire périodique, paire dans le cas des signes inférieurs, impaire dans le cas des signes supérieurs, et $\sqrt{1-c^2}$ devant, dans ce dernier cas, être assimilé à une fonction périodique impaire.

Maintenant, les expressions (15) ou (15′) étant introduites dans (3), on en conclura φ par une quadrature et, par suite, $d\sigma$ et $d\tau$ au moyen de (2). Mais il y a une condition particulière à remplir, à savoir la condition (12), laquelle revient à

$$dv_1 \sin\varphi_1 = dv \cos\varphi, \quad \text{ou} \quad \sin\varphi_1 = \pm\cos\varphi,$$

et, par conséquent, on a

$$(16) \qquad \varphi_1 \mp \varphi = (2p+1)\frac{\pi}{2},$$

p étant un nombre entier quelconque, pair quand on prend dans (14)

le signe supérieur et impair dans le cas contraire. La quadrature (3), savoir

$$\varphi = \int dv \tang i,$$

fournira une expression de la forme

$$\varphi = kt + h + f(t),$$

h et k étant des constantes, et $f(t)$ une fonction périodique, généralement paire. En la supposant paire, il faudra prendre dans (16) le signe supérieur, et l'on aura

$$k = (2p+1)\frac{\pi}{2},$$

ce qui servira à déterminer ε généralement, en supposant connues toutes les autres quantités. Si $f(t)$ pouvait être impaire, il faudrait prendre dans (16) le signe inférieur, et l'on aurait

$$2h = (2p+1)\frac{\pi}{2},$$

k devant être nul dans le cas présent.

Les angles α, β, γ se tireront ensuite des formules (4), en supposant toujours variable le rapport $\frac{d\sigma}{d\tau} = \tang\varphi$. Puis, en observant que

$$ds_0 = \frac{1}{m} ds_1 = \frac{1}{m} R_1 \, d\sigma_1 = \frac{1}{m} R_1 \, d\tau,$$

l'équation (9) pourra s'écrire

$$\mp \frac{1}{m} R_1 + R + \frac{d\frac{dR}{d\tau}}{d\tau} = 0. \tag{17}$$

Quand on aura tiré R de cette équation, on obtiendra finalement x, y, z par les quadratures

$$x = \int R \cos\alpha \, d\sigma, \quad y = \int R \cos\beta \, d\sigma, \quad z = \int R \cos\gamma \, d\sigma. \tag{18}$$

3. La difficulté de la question est réduite actuellement à l'intégration de l'équation (17). Il s'offre immédiatement un cas particulier où

la difficulté disparaît : c'est le cas où l'on suppose R constant. On sait que, R étant constant, l'arête de rebroussement de la surface polaire se confond avec le lieu des centres de courbure. Dans la question présente, il faudra prendre $m = \pm 1$; l'équation (17) sera identique, et, ayant adopté les formules générales (15), la solution s'achèvera comme on vient de l'indiquer.

Lorsque R est supposé variable, en mettant en évidence la variable indépendante t, l'équation (17) pourra s'écrire

$$(17') \qquad \mp \frac{1}{m} R_1 + R + \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \frac{dR}{dt} + \theta \frac{d^2R}{dt^2} = 0,$$

où, pour abréger, on a posé

$$\frac{1}{\theta} = \frac{d\tau^2}{dt^2},$$

R_1 étant censé répondre actuellement à la valeur $t + 1$ de t. Il convient de remarquer, à ce propos, qu'en vertu des relations (2), (14), (16), on a

$$\frac{d\tau_1^2}{dt^2} = \frac{dv^2}{dt^2} \cos^2\varphi_1 = \frac{dv^2}{dt^2} \sin^2\varphi = \frac{dv^2}{dt^2} - \frac{d\tau^2}{dt^2},$$

et, par suite,

$$\frac{d\tau_1^2}{dt^2} = \frac{d\tau^2}{dt^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \theta_1 = \theta,$$

en sorte que θ est une fonction périodique dont l'amplitude de période est 2.

Cela étant, si l'on différentie deux fois de suite l'équation (17'), on en déduira $\frac{dR_1}{dt}$, $\frac{d^2R_1}{dt^2}$ au moyen de R et de ses dérivées jusqu'au quatrième ordre. En changeant ensuite, dans la même équation, t en $t + 1$, on aura une nouvelle équation d'où l'on pourra éliminer R_1, $\frac{dR_1}{dt}$, $\frac{d^2R_1}{dt^2}$ au moyen de (17') elle-même, et des expressions de $\frac{dR_1}{dt}$, $\frac{d^2R_1}{dt^2}$ qu'on en a tout à l'heure déduites. L'équation à laquelle on arrivera ainsi sera à coefficients périodiques, en prenant 2 pour amplitude de période, et rentrera conséquemment dans la classe de celles dont il a été question au § II.

4. Je vais examiner, avec quelques détails, le cas, jusqu'ici exclu, où le rapport $\frac{d\sigma}{d\tau} = \tang\varphi$ est supposé constant. La formule (3) montre que R est constamment égal à l'unité, dv, par sa nature, ne pouvant être toujours nul. La courbe sphérique ($\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$) est donc présentement un grand cercle, et il existe, en conséquence, une relation linéaire entre ces trois cosinus : ce qui résulte aussi, d'ailleurs, de la considération des équations (4), qui s'intègrent immédiatement dans le cas présent. Ainsi l'on a

$$g\cos\xi + g'\cos\eta + g''\cos\zeta = 0,$$

g, g', g'' étant des constantes. En substituant, dans cette relation, les formules (13), changeant dans le résultat trouvé t en $t-1$, et soustrayant ensuite l'équation précédente, on aura

$$\left(g'\cos\frac{\varepsilon}{2} + g\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\xi = \left(g\cos\frac{\varepsilon}{2} - g'\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\eta,$$

en mettant de côté l'hypothèse de $\sin\frac{\varepsilon}{2}$ égal à zéro. Cette équation, jointe à la précédente et à l'équation ordinaire entre les trois cosinus, fournit pour $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ des valeurs constantes (circonstance qu'on peut exclure), à moins que g et g' ne soient nuls en même temps. Il faut donc que $\cos\zeta$ soit nul, et les équations (15) peuvent être réduites aux suivantes :

$$\cos\xi = -\cos(\overline{\pi + \varepsilon t} + \varpi), \quad \cos\eta = -\sin(\overline{\pi + \varepsilon t} + \varpi), \quad \cos\zeta = 0,$$

où l'on a adopté les signes actuels, à cause que, dans (13), il faut prendre les signes supérieurs par la raison indiquée un peu plus loin. On a, par suite,

$$dv = d(\overline{\pi + \varepsilon t} + \varpi), \quad v = \overline{\pi + \varepsilon t} + \varpi,$$

et, conformément à (14),

$$v_1 - v = \pi + \varepsilon.$$

La relation (16) exige en même temps que φ soit égal à $(2p+1)\frac{\pi}{4}$, ou simplement à $\frac{\pi}{4}$. Comme ici

$$\cos\xi = -\cos v, \quad \cos\eta = -\sin v,$$

si l'on se reporte au calcul de l'Ouvrage cité (p. 448 et suiv.) on aura

$$\cos\alpha = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sin\upsilon,\quad \cos\beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\upsilon,\quad \cos\gamma = \tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\cos\lambda = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sin\upsilon,\quad \cos\mu = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\upsilon,\quad \cos\nu = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$

$\cos\gamma$ et $\cos\nu$ étant constants et de signes contraires, la dernière (11) montre que, dans les groupes (12) et (13) et, par suite, dans (17), il faut adopter les signes supérieurs. Enfin, d'après (2),

$$d\sigma = d\tau = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,d\upsilon;$$

de sorte que

$$dx = -\tfrac{1}{2}\mathrm{R}\sin\upsilon\,d\upsilon,\quad dy = \tfrac{1}{2}\mathrm{R}\cos\upsilon\,d\upsilon,\quad dz = \tfrac{1}{2}\mathrm{R}\,d\upsilon,$$

et il faut déterminer R au moyen de l'équation

$$-\frac{1}{m}\mathrm{R}_1 + \mathrm{R} + 2\frac{d^2\mathrm{R}}{d\upsilon^2} = 0,$$

où, R étant censé une fonction de la variable indépendante actuelle υ, R_1 est la valeur de cette fonction qui répond à la valeur suivante υ_1 :

$$\upsilon_1 = \upsilon + \pi + \varepsilon = \upsilon + h,$$

de cette même variable indépendante. En appliquant à l'équation précédente la méthode ordinaire des exponentielles, on aura

$$\mathrm{R} = \Sigma\,\mathrm{A}_\rho e^{\rho\upsilon},$$

les A_ρ étant des constantes arbitraires, et le Σ s'étendant aux racines en nombre infini de l'équation

$$(\rho)\qquad e^{\rho h} - m(1 + 2\rho^2) = 0.$$

De ces diverses expressions on conclut

$$x = \frac{1}{2}\sum\frac{\mathrm{A}_\rho}{1+\rho^2}e^{\rho\upsilon}(\cos\upsilon - \rho\sin\upsilon),$$

$$y = \frac{1}{2}\sum\frac{\mathrm{A}_\rho}{1+\rho^2}e^{\rho\upsilon}(\sin\upsilon + \rho\cos\upsilon),$$

$$z = \frac{1}{2}\sum\frac{\mathrm{A}_\rho}{\rho}e^{\rho\upsilon},$$

les seconds membres étant augmentés, si l'on veut, de constantes arbitraires.

On peut faire généralement une vérification, en calculant x_0, y_0, z_0, au moyen de (6) d'une part, et en déduisant, d'autre part, ces mêmes quantités des formules (10). Les formules (6) deviennent, dans le cas présent,

$$x_0 = x - \mathrm{R}\cos v + \frac{d\mathrm{R}}{dv}\sin v, \quad y_0 = y - \mathrm{R}\sin v - \frac{d\mathrm{R}}{dv}\cos v, \quad z_0 = z + \frac{d\mathrm{R}}{dv},$$

et, en y introduisant les expressions précédentes, on obtient

$$-x_0 = \frac{1}{2}\sum \frac{1+2\rho^2}{1+\rho^2}\mathrm{A}_\rho e^{\rho v}(\cos v - \rho\sin v),$$

$$-y_0 = \frac{1}{2}\sum \frac{1+2\rho^2}{1+\rho^2}\mathrm{A}_\rho e^{\rho v}(\sin v + \rho\cos v),$$

$$-z_0 = \frac{1}{2}\sum \frac{1+2\rho^2}{\rho}\mathrm{A}_\rho e^{\rho v}.$$

D'un autre côté, les mêmes expressions de x, y, z donnent, par exemple,

$$x_1\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon = -\frac{1}{2}\sum e^{\rho h}\frac{\mathrm{A}_\rho}{1+\rho^2}e^{\rho v}(\cos v - \rho\sin v),$$

et, en éliminant $e^{\rho h}$ au moyen de l'équation (ρ), le second membre se réduit à

$$-m\frac{1}{2}\sum \frac{1+2\rho^2}{1+\rho^2}\mathrm{A}_\rho e^{\rho v}(\cos v - \rho\sin v),$$

c'est-à-dire à mx_0, ce qui est conforme aux conditions (10).

Dans le cas très-particulier où R est supposé constant, l'équation aux différences mêlées qui doit déterminer R exige, comme on l'a déjà dit, que m soit égal à l'unité. L'équation (ρ) admet alors une racine nulle, et l'on retrouve une hélice ordinaire en faisant ρ nulle dans les expressions ci-dessus de x et de y; quant à z, comme on peut ajouter une constante arbitraire au second membre, on pourra poser, en passant à la limite,

$$\frac{\mathrm{A}_\rho}{\rho} + \text{const.} = 0.$$

On obtiendra ainsi

$$x = \tfrac{1}{2}\mathrm{R}\cos v, \quad y = \tfrac{1}{2}\mathrm{R}\sin v, \quad z = \tfrac{1}{2}\mathrm{R}v,$$

On peut remarquer généralement que, dans les équations qui fournissent la solution pour le cas des hélices, la quantité $h = \varepsilon + \pi$ reste arbitraire, mais toujours différente de zéro. Cependant, en la supposant infiniment petite, on obtient

$$\rho = \pm\sqrt{\frac{1-m}{2m}},$$

et ces deux racines fournissent une hélice qui répond encore aux conditions géométriques de la question.

Le cas le plus simple, après celui de l'hélice ordinaire signalé il y a un instant, est celui où l'on prend, dans l'expression ci-dessus de R, une seule exponentielle. En se donnant à volonté une valeur réelle de ρ, on peut tirer m ou h de l'équation (ρ). Si l'on désigne par a et c deux constantes réelles quelconques, et qu'on pose

$$\rho = \operatorname{tang} c,$$

on aura

$$x = a\cos c\cos(v+c)e^{v\operatorname{tang} c},\quad y = a\cos c\sin(v+c)e^{v\operatorname{tang} c},\quad z = a\cot c\, e^{v\operatorname{tang} c},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x} = \operatorname{tang}(v+c),\quad r = \sqrt{x^2+y^2} = a\cos c\, e^{v\operatorname{tang} c}.$$

et, par conséquent,

$$\theta = v + c,\quad r = a\cos c\, e^{(\theta-c)\operatorname{tang} c};$$

la base du cylindre est donc une spirale logarithmique, et l'on obtient la courbe (x_0, y_0, z_0) en faisant tourner l'hélice actuelle (xyz) de deux angles droits autour de l'axe des z, puis la dilatant suivant les z et les rayons vecteurs r dans le rapport de $1 + 2\operatorname{tang}^2 c$ à l'unité.

Je ferai remarquer, à propos de cet exemple, que si l'on prenait, un peu plus généralement, l'hélice

$$x = a\cos\theta\, e^{k\theta},\quad y = a\sin\theta\, e^{k\theta},\quad z = b e^{k\theta},$$

où a, b, k sont trois constantes quelconques, de sorte que la base du cylindre est toujours une spirale logarithmique, mais la courbe coupe actuellement les génératrices sous un angle quelconque (et non plus de 45 degrés), on trouverait, pour l'arête de rebroussement de la surface

polaire, une courbe *de même nature,* mais non plus semblable généralement à la proposée.

On aurait encore un cas, relativement simple, en se donnant arbitrairement deux valeurs de ρ et déterminant m et h au moyen des deux équations obtenues en substituant dans l'équation (ρ) les deux valeurs dont il s'agit.

Il resterait à séparer, dans le cas général des hélices, les racines de l'équation (ρ), ce qu'on pourrait faire par les méthodes de Cauchy ou autrement; mais j'ai cru pouvoir me dispenser de ce calcul.

Je me dispense également d'examiner particulièrement l'hypothèse, exclue en passant, où l'on admet que ε est égal à zéro.

Enfin je ferai remarquer, en terminant ce paragraphe, qu'on pourrait imaginer d'autres questions, non dépourvues d'intérêt, en faisant intervenir, au lieu de l'arête de rebroussement de la surface polaire, les développées gauches ou le lieu des centres de courbure; mais il m'a paru, d'après un aperçu rapide, que les difficultés d'intégration devenaient beaucoup plus grandes.

§ VI. — *Généralisation d'un problème d'Euler.*

1. Le problème d'Euler dont il s'agit ici peut être énoncé, si l'on veut, de la manière suivante : « Trouver la courbe dans laquelle le carré de la normale en un point quelconque surpasse d'une quantité constante donnée l'ordonnée élevée par le pied de cette normale et terminée à la même courbe. » La question correspondante, pour le cas des trois dimensions, doit avoir pour objet naturellement de « déterminer la surface telle, que le carré de la normale, terminée au plan horizontal des xy, surpasse d'une quantité constante donnée l'ordonnée verticale de la même surface menée par le pied de cette normale. »

En désignant par $f(x,y)$ l'ordonnée verticale de la surface, relative au point quelconque (x, y, f), par x_1, y_1 les coordonnées du point où cette normale rencontre le plan des xy, on voit tout de suite que les équations du problème actuel sont

$$x_1 = x + f\frac{df}{dx}, \quad y_1 = y + f\frac{df}{dy},$$

$$\left(1 + \frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2}\right) f^2 = k + [f(x_1, y_1)]^2,$$

k étant une constante donnée; mais, en vue d'une certaine extension analytique, je prendrai le cas de la Géométrie à $n+1$ dimensions, et je considérerai, en conséquence, le système d'équations

$$x_1 = x + f\frac{df}{dx}, \quad y_1 = y + f\frac{df}{dy}, \ldots, \quad z_1 = z + f\frac{df}{dz},$$

$$\left(1 + \frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \ldots + \frac{df^2}{dz^2}\right) f^2 = k + [f(x_1, y_1, \ldots, z_1)]^2,$$

où la fonction inconnue f dépend des n variables indépendantes x, $y, \ldots, z$.

Conformément à ce qui a été dit au n° 4 du § I, on peut regarder x, $y, \ldots, z$ comme des fonctions indéterminées de n nouvelles variables indépendantes $t, \theta, \ldots, \tau$ et $x_1, y_1, \ldots, z_1$ comme les valeurs que prennent ces fonctions quand les nouvelles variables indépendantes s'accroissent simultanément de l'unité. La caractéristique Δ étant censée répondre à l'accroissement total d'une fonction, si l'on pose

$$f^2 = u,$$

le précédent système d'équations pourra être remplacé par le suivant :

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\Delta x = \dfrac{du}{dx}, \quad 2\Delta y = \dfrac{du}{dy}, \ldots, \quad 2\Delta z = \dfrac{du}{dz}, \\ \Delta u + k = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \ldots + (\Delta z)^2. \end{cases}$$

2. La relation identique

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \ldots + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}$$

revient, en vertu de la première ligne (1), à

$$(2)\qquad \frac{du}{dt} = 2\Delta x\frac{dx}{dt} + 2\Delta y\frac{dy}{dt} + \ldots + 2\Delta z\frac{dz}{dt},$$

et l'on aurait pareillement

$$(2')\qquad \frac{du}{d\theta} = 2\Delta x\frac{dx}{d\theta} + 2\Delta y\frac{dy}{d\theta} + \ldots + 2\Delta z\frac{dz}{d\theta}.$$

La comparaison des deux expressions de $\frac{d^2 u}{dt\,d\theta}$, déduites de (2) et (2′), fournit

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}\frac{d\Delta x}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}\frac{d\Delta x}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\Delta y}{d\theta}-\frac{dy}{d\theta}\frac{d\Delta y}{dt}+\ldots\\ &\qquad\qquad+\frac{dz}{dt}\frac{d\Delta z}{d\theta}-\frac{dz}{d\theta}\frac{d\Delta z}{dt}=0,\end{aligned}\right.$$

et les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations comprises dans ce type expriment certaines conditions d'intégrabilité qui seront utiles tout à l'heure pour un cas particulier, mais dont la considération peut aussi être évitée, comme on le verra plus loin.

La différentiation de la dernière équation (1) donne

$$\Delta\frac{du}{dt}=2\Delta x\frac{d\Delta x}{dt}+2\Delta y\frac{d\Delta y}{dt}+\ldots+2\Delta z\frac{d\Delta z}{dt};$$

mais, en différentiant par Δ l'équation (2), on a

$$\Delta\frac{du}{dt}=2\Delta x\frac{d\Delta x}{dt}+2\frac{dx}{dt}\Delta\Delta x+2\frac{d\Delta x}{dt}\Delta\Delta x+\ldots,$$

en sous-entendant les termes analogues en $y,\ldots, z$. Si l'on observe que

$$x_1=x+\Delta x,\quad \frac{dx_1}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{d\Delta x}{dt},$$

la comparaison des deux précédentes expressions de $\Delta\frac{du}{dt}$ fournit la première du groupe suivant, les autres équations de ce groupe provenant d'un calcul analogue,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt}\Delta\Delta x+\frac{dy_1}{dt}\Delta\Delta y+\ldots+\frac{dz_1}{dt}\Delta\Delta z=0,\\ &\frac{dx_1}{d\theta}\Delta\Delta x+\frac{dy_1}{d\theta}\Delta\Delta y+\ldots+\frac{dz_1}{d\theta}\Delta\Delta z=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\frac{dx_1}{d\tau}\Delta\Delta x+\frac{dy_1}{d\tau}\Delta\Delta y+\ldots+\frac{dz_1}{d\tau}\Delta\Delta z=0.\end{aligned}\right.$$

Comme le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} & \cdots & \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dx_1}{d\theta} & \frac{dy_1}{d\theta} & \cdots & \frac{dz_1}{d\theta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dx_1}{d\tau} & \frac{dy_1}{d\tau} & \cdots & \frac{dz_1}{d\tau} \end{vmatrix}$$

ne peut être identiquement nul, sans quoi les variables $x_1, y_1, \ldots, z_1$ et, par suite, aussi $x, y, \ldots, z$ ne seraient pas indépendantes, les équations (4), en y regardant $\Delta\Delta x, \Delta\Delta y, \ldots, \Delta\Delta z$ comme des inconnues, exigent qu'on ait

$$(5) \qquad \Delta\Delta x = 0, \quad \Delta\Delta y = 0, \ldots, \quad \Delta\Delta z = 0.$$

3. Avant de continuer la solution dans sa généralité, j'examinerai un cas particulier, qui se présente assez naturellement, et qui répond à la supposition spéciale, savoir que x ne dépend que de t, y que de $\theta, \ldots, z$ que de τ. Cette supposition rend identiques les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations (3). De plus, les équations (5) fournissent tout de suite

$$(6) \qquad x = at + a', \quad y = b\theta + b', \ldots, \quad z = c\tau + c',$$

a et a' étant des fonctions arbitraires et périodiques de t, dont elles dépendent uniquement; b et b' des fonctions arbitraires et périodiques de θ, dont elles dépendent uniquement, etc. En observant que, dans le cas présent, on a

$$(7) \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = 2\Delta x \frac{dx}{dt} = 2a\left(\frac{d\,at}{dt} + \frac{da'}{dt}\right), \\ \frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\theta} = 2\Delta y \frac{dy}{d\theta} = 2b\left(\frac{d\,b\theta}{d\theta} + \frac{db'}{d\theta}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

on en conclut que u est de la forme

$$\varphi(t) + \psi(\theta) + \ldots + \chi(\tau),$$

et que, par suite,

$$\Delta u = \Delta\varphi + \Delta\psi + \ldots + \Delta\chi.$$

La dernière équation (1) devient donc

$$\Delta\varphi + \Delta\psi + \ldots + \Delta\chi + k = a^2 + b^2 + \ldots + c^2;$$

et, par conséquent, en désignant par $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ des constantes arbitraires, assujetties toutefois à la condition

$$\alpha + \beta + \ldots + \gamma = k,$$

la comparaison des termes de même nature, dans les deux membres de la précédente équation, exige que

$$\Delta\varphi = a^2 - \alpha, \quad \Delta\psi = b^2 - \beta, \ldots, \quad \Delta\chi = c^2 - \gamma.$$

Chacune de ces équations s'intègre tout de suite, isolément; et, si l'on désigne par a'', b'',..., c'' des fonctions arbitraires et périodiques de $t, \theta, \ldots, \tau$, respectivement, on a finalement

$$(8) \qquad u = (a^2 - \alpha)t + a'' + (b^2 - \beta)\theta + b'' + \ldots + (c^2 - \gamma)\tau + c''.$$

La substitution de cette expression dans les équations (7) fournit, entre les fonctions arbitraires, les relations suivantes :

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + 2a\dfrac{da'}{dt} - \dfrac{da''}{dt} + \alpha = 0, \\ b^2 + 2b\dfrac{db'}{d\theta} - \dfrac{db''}{d\theta} + \beta = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c^2 + 2c\dfrac{dc'}{d\tau} - \dfrac{dc''}{d\tau} + \gamma = 0; \end{array} \right.$$

d'où l'on peut déduire, si l'on veut, sous forme finie, les fonctions a, b,..., c, en prenant arbitrairement les $2n$ fonctions périodiques d'une seule variable respectivement : a', a'' ; b', b'',... ; c', c''.

On peut remarquer que l'élimination des paramètres $t, \theta, \ldots, \tau$ entre les équations (6) et (8) ne donne pas pour u une fonction de la seule quantité $(x^2 + y^2 + \ldots + z^2)$ et qu'ainsi, dans le cas des trois dimensions, la surface ne résulte pas de la rotation autour de l'axe des f de

l'une des courbes planes répondant au problème d'Euler. Si u était effectivement une fonction de $(x^2+y^2+\ldots+z^2)$ seulement, $x, y, \ldots, z$ devraient être proportionnels à $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \ldots, \frac{du}{dz}$, ou, d'après (1), à Δx, $\Delta y, \ldots, \Delta z$: on devrait donc avoir, en ayant égard à (6),

$$t+\frac{a'}{a}=\theta+\frac{b'}{b}=\ldots=\tau+\frac{c'}{c},$$

résultat inadmissible, car, h étant une constante, il en résulterait

$$\frac{a'}{a}=h-t,\quad \frac{b'}{b}=h-\theta, \ldots,\quad \frac{c'}{c}=h-\tau,$$

et les fonctions $\frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}, \ldots, \frac{c'}{c}$ ne seraient pas périodiques.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule variable indépendante x, la solution ci-dessus se confond avec celle de Poisson, laquelle n'est ni moins complète ni moins uniforme que celle de M. Ellis, rapportée par M. Boole [1]. Si, en effet, au lieu de tirer a de la première équation (9), la seule qui subsiste actuellement, on tire a'' de cette même équation, la solution est représentée par les formules

$$x=at+a',$$

$$u=2\int a\left(a+t\frac{da}{dt}+\frac{da'}{dt}\right)dt,$$

qui ne diffèrent que par la notation de celles de M. Ellis. De plus, il n'est pas tenu compte, dans la solution rapportée par M. Boole, de la remarque que fait Poisson à la page 146 (3°) de son Mémoire. Conformément à cette remarque, il faudrait examiner si la quantité que M. Boole désigne par u_{t+1} ou $\chi(x)$ ne peut pas être constante. Cette hypothèse donnerait le cercle comme dans la solution de Poisson. Cette courbe

---

[1] Dans l'excellent Ouvrage sur les différences finies de ce dernier auteur, on trouve, à la page 238, le passage suivant : « The following once famous problem ingaged in succession the attention of Euler, Biot and Poisson. But the subjoined solution, which alone is caracterised by unity and completeness, is due to the late M. Ellis ». (*Cambridge Journal*, vol. III, p. 131).

particulière est d'ailleurs fournie à M. Ellis par un certain facteur qui se trouve, dès le début, égalé à zéro. Mais à ce point de vue, bien particulier il est vrai, la solution de M. Ellis, telle qu'elle est rapportée par M. Boole, serait moins complète que celle de Poisson.

4. J'ai supposé jusqu'ici que la caractéristique Δ correspondait à l'accroissement simultané *un* de toutes les variables indépendantes. Mais, d'après ce qui a été dit au § I, on peut supposer, sans nuire à la généralité de la question, que cette caractéristique correspond à l'accroissement *un* de l'unique variable t, les autres variables $\theta, \ldots, \tau$ ne changeant pas. En se plaçant désormais à ce point de vue, les équations (5) auront pour intégrales

$$(10) \qquad x = at + a', \quad y = bt + b', \ldots, \quad z = ct + c';$$

$a, a', b, b', \ldots, c, c'$ étant des fonctions tout à fait arbitraires de $t, \theta, \ldots, \tau$, mais périodiques relativement à la première de ces variables. Par la substitution dans les équations (3), on obtient les deux groupes

$$\begin{gathered}
a\frac{da}{d\theta} + \frac{da}{d\theta}\frac{da'}{dt} - \frac{da}{dt}\frac{da'}{d\theta} + \ldots = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a\frac{da}{d\tau} + \frac{da}{d\tau}\frac{da'}{dt} - \frac{da}{dt}\frac{da'}{d\tau} + \ldots = 0,\\
\frac{da}{d\theta}\frac{da'}{d\tau} - \frac{da}{d\tau}\frac{da'}{d\theta} + \ldots = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

où il faudrait écrire les termes analogues en $b, b', \ldots; c, c'$. Le premier groupe est formé de $(n-1)$ équations où figurent les dérivées partielles relatives à t, et le second groupe contient les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations où ne figurent pas de dérivées relatives à cette même variable.

Ici s'offre encore naturellement une manière toute particulière de satisfaire à ces *conditions d'intégrabilité :* elle consiste à supposer que a' est une fonction arbitraire de a; b' une fonction arbitraire de b;....

Bien que ce cas puisse être censé compris dans la solution générale, donnée un peu plus loin, il m'a paru convenable de le traiter directement, à cause de sa simplicité relative. D'après l'hypothèse multiple qui vient d'être faite, les équations du second groupe deviennent identiques; et quant à celles du premier, elles se réduisent à

$$a\frac{da}{d\theta}+b\frac{db}{d\theta}+\ldots+c\frac{dc}{d\theta}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a\frac{da}{d\tau}+b\frac{db}{d\tau}+\ldots+c\frac{dc}{d\tau}=0;$$

de sorte que, en posant

$$a^2+b^2+\ldots+c^2=h^2,$$

h^2 ne peut être qu'une fonction périodique de t, indépendante de $\theta,\ldots,\tau$. Pour simplifier je supposerai h tout à fait constant, c'est-à-dire indépendant aussi de t. La dernière équation (1) devient d'ailleurs, dans la même hypothèse,

$$\Delta u=h^2-k;$$

d'où

$$u=(h^2-k)t+v,$$

v étant une fonction arbitraire de $\theta,\ldots,\tau$, contenant t sous forme périodique. On aura ensuite, d'après (2) et (2'),

$$\frac{dv}{dt}=k+h^2+2a\frac{da'}{dt}+2b\frac{db'}{dt}+\ldots+2c\frac{dc'}{dt},$$
$$\frac{dv}{d\theta}=\qquad 2a\frac{da'}{d\theta}+2b\frac{db'}{d\theta}+\ldots+2c\frac{dc'}{d\theta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et, par conséquent,

$$v=(k+h^2)t+2\int a\,da'+2\int b\,db'+\ldots+2\int c\,dc'.$$

Comme v doit être périodique par rapport à t, il faut prendre nécessairement $h^2 = -k$.

5. Je reviens au cas général. En posant, pour abréger,

$$a^2 + b^2 + \ldots + c^2 = r^2,$$

et, substituant les valeurs (10) dans (2) et (2′), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= 2r^2 + 2t\frac{rdr}{dt} + 2\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + \ldots + c\frac{dc'}{dt}\right),\\
\frac{du}{d\theta} &= \phantom{2r^2 +{}} 2t\frac{rdr}{d\theta} + 2\left(a\frac{da'}{d\theta} + b\frac{db'}{d\theta} + \ldots + c\frac{dc'}{d\theta}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\Delta u = r^2 - k;$$

d'où

$$u = (r^2 - k)t + v, \tag{11}$$

v étant une fonction arbitraire de toutes les variables indépendantes, mais périodique relativement à t. De là résulte, en ayant égard aux précédentes expressions de $\frac{du}{dt}, \frac{du}{d\theta}, \ldots$,

$$dv = (r^2 + k)\,dt + 2a\,da' + 2b\,db' + \ldots + 2c\,dc'. \tag{12}$$

Soit pris arbitrairement

$$v = \mathrm{F}(t, \theta, \ldots, \tau), \tag{13}$$

F étant une fonction donnée quelconque de $t, \theta, \ldots, \tau$, contenant toutefois sous forme périodique seulement la première de ces variables. Soient, en même temps,

$$\left\{\begin{aligned}
a' &= \psi(t, \theta, \ldots, \tau),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
c' &= \chi(t, \theta, \ldots, \tau),
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

$\psi, \ldots, \chi$ étant des fonctions arbitraires indépendantes, de la même

nature que F. On tirera de ces dernières équations

$$(15)\quad \begin{cases} t = \varpi(a', b', \ldots, c'), \\ \theta = \rho\,(a', b', \ldots, c'), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \tau = \omega\,(a', b', \ldots, c'), \end{cases}$$

et, en substituant ces valeurs dans F, cette dernière quantité deviendra une fonction de a', b',..., c' que je désignerai par w. L'équation (12) donnera donc

$$(16)\qquad dw = (r^2 + k)\,d\varpi + 2(a\,da' + b\,db' + \ldots + c\,dc'),$$

d'où, à cause de l'indépendance des variables a', b',..., c', résulte

$$(17)\quad \begin{cases} (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{da'} + 2a - \dfrac{dw}{da'} = 0, \\ (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{db'} + 2b - \dfrac{dw}{db'} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{dc'} + 2c - \dfrac{dw}{dc'} = 0. \end{cases}$$

On tirera de ces équations les valeurs de a, b, ..., c en a', b', ..., c'; après quoi on pourra remettre pour a', b',..., c' les seconds membres des équations (14).

Il est presque superflu de faire observer que les expressions de a, b,..., c ainsi trouvées seront périodiques relativement à t, et que, de plus, la solution définitive n'exige, en réalité, aucune intégration.

Les équations (17), écrites comme il suit :

$$(17')\quad \begin{cases} 2a = \dfrac{dw}{da'} - (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{da'}, \\ 2b = \dfrac{dw}{db'} - (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{db'}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 2c = \dfrac{dw}{dc'} - (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{dc'}, \end{cases}$$

étant élevées au carré et ensuite ajoutées, donnent

$$(18)\qquad P(r^2 + k)^2 - 2Q(r^2 + k) + R = 0,$$

où, pour abréger,

$$P = \frac{d\varpi^2}{da'^2} + \frac{d\varpi^2}{db'^2} + \ldots + \frac{d\varpi^2}{dc'^2},$$

$$Q = \frac{d\varpi}{da'}\frac{dw}{da'} + \ldots + \frac{d\varpi}{dc'}\frac{dw}{dc'} + 2,$$

$$R = \frac{dw^2}{da'^2} + \frac{dw^2}{db'^2} + \ldots + \frac{dw^2}{dc'^2} + 4k.$$

En résolvant l'unique équation du second degré (18), pour en tirer r^2+k, on obtiendra donc immédiatement, par (17'), les expressions finies de $a, b, \ldots, c$.

Maintenant il est clair que, dans l'application, il n'est pas nécessaire, quand on a posé les équations (14), d'en déduire les équations inverses (15). On peut, en effet, par les formules ordinaires, pour le changement des variables indépendantes, ne faire figurer directement dans les équations (17') et (18) que les dérivées $\frac{dF}{dt}, \frac{dF}{d\theta}, \ldots, \frac{dF}{d\tau}; \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\psi}{d\theta}, \ldots, \frac{d\psi}{d\tau}, \ldots; \frac{d\chi}{dt}, \frac{d\chi}{d\theta}, \ldots, \frac{d\chi}{d\tau}$; mais il me paraît assez inutile d'effectuer cette transformation générale, qui n'offre aucune espèce de difficulté théorique nouvelle.

Il faut remarquer que la solution précédente, qui peut être regardée comme générale, laisse échapper certains cas particuliers. Elle suppose implicitement, en effet, que les fonctions $a', b', \ldots, c'$ sont indépendantes entre elles. Si l'on faisait une hypothèse contraire, il faudrait revenir à la différentielle (12). Comme des $2n$ fonctions $a, a'; b, b', \ldots; c, c', n-1$ doivent être indépendantes, afin que, d'après (10), $x, y, \ldots, z$ le soient également, il faudrait partager ces fonctions en deux groupes, en spécifiant quelles sont celles qu'on suppose indépendantes, et considérer toutes les autres comme des fonctions de celles-là, et de t si l'on veut. Alors on déduirait de (12) n relations que je ne développerai pas davantage, pour ne pas trop insister sur le problème actuel. On trouve un exemple particulier de ce qui vient d'être dit dans le cas spécial développé au n° 4, où un nombre quelconque des quantités $a', b', \ldots, c'$ peuvent être supposées constantes; mais les n équations dont je viens de parler exigent, suivant le choix des variables indépendantes adoptées, des développements ultérieurs plus ou moins complexes.

Au reste, on peut observer généralement que si, après avoir posé les équations (13) et (14), on conserve pour variables indépendantes les quantités t, θ,..., τ, l'équation (12) fournira immédiatement

$$r^2 + k + 2a\frac{d\psi}{dt} + \ldots + 2c\frac{d\chi}{dt} - \frac{dF}{dt} = 0,$$

$$2a\frac{d\psi}{d\theta} + \ldots + 2c\frac{d\chi}{d\theta} - \frac{dF}{d\theta} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$2a\frac{d\psi}{d\tau} + \ldots + 2c\frac{d\chi}{d\tau} - \frac{dF}{d\tau} = 0;$$

On voit sur-le-champ qu'on peut déduire a, b,..., c de ces équations moyennant la résolution d'une équation du second degré et d'autres du premier. La formation de cette équation est moins simple que lorsqu'on prenait a', b',..., c' pour les variables indépendantes; mais on a ici l'avantage que les quantités que l'on a en vue de déterminer se trouvent tout de suite exprimées au moyen des variables indépendantes les plus naturelles, t, θ,..., τ.

Par exemple si, prenant le cas des surfaces, on pose

$$v = \theta^2, \quad a' = \theta \sin 2\pi t, \quad b' = \theta \cos 2\pi t,$$

l'équation (12) fournira

$$a \sin 2\pi t + b \cos 2\pi t = \theta,$$

$$-a \cos 2\pi t + b \sin 2\pi t = \frac{r^2 + k}{4\pi\theta};$$

en faisant la somme des carrés, on aura une équation d'où l'on déduira

$$\frac{r^2 + k}{4\pi\theta} = 2\pi\theta \pm \sqrt{(4\pi^2 - 1)\theta^2 - k},$$

et l'on conclura ensuite a et b des deux équations précédentes.

SUR LES

MODIFICATIONS QU'ÉPROUVE LA LUMIÈRE

PAR SUITE

DU MOUVEMENT DE LA SOURCE LUMINEUSE ET DU MOUVEMENT DE L'OBSERVATEUR

(DEUXIÈME PARTIE);

PAR M. MASCART,

PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

IX. — *Réfraction dans un prisme.*

Dans un travail précédent ([1]), j'ai étudié par la théorie et par l'expérience les phénomènes de réflexion et ceux de diffraction, au point de vue de l'influence que peuvent exercer le déplacement de la source lumineuse et le mouvement de l'observateur; il me reste maintenant à passer en revue les expériences dans lesquelles la lumière traverse un milieu réfringent. J'examinerai d'abord la réfraction ordinaire.

Influence du déplacement de la source. — Le problème ne présente pas de difficultés si la source de lumière est seule mobile, le prisme réfringent étant fixe avec l'observateur. Dans ce cas, les ondes incidentes sont modifiées par le déplacement de la source ([2]) et l'on peut aisément calculer le changement qu'éprouve la réfraction : j'indiquerai quelques exemples du calcul, parce que j'aurai à en faire usage plus tard.

Supposons qu'une source qui émettrait, à l'état de repos, une lumière homogène de longueur d'onde λ marche vers un prisme réfrin-

([1]) *Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure*, 2e série, t. I, p. 157.
([2]) *Loc. cit.*, p. 172.

gent avec la vitesse de la Terre, la longueur d'onde des rayons qui parviendront au prisme sera, en désignant par a l'aberration,

$$\lambda' = \lambda(1 - a).$$

Si, dans une autre expérience, la source s'éloigne du prisme, la longueur d'onde deviendra

$$\lambda'' = \lambda(1 + a),$$

ce qui donne

$$\frac{\lambda'' - \lambda'}{\lambda} = 2a = \frac{1}{5000}.$$

Le changement de longueur d'onde dans les deux expériences est donc de $\frac{1}{5000}$. Comme les longueurs d'onde des deux raies du groupe D appartenant au sodium diffèrent d'environ $\frac{1}{1000}$, il en résulte que, si la lumière que l'on observe a une réfrangibilité voisine de celle de la lumière jaune de la soude, on pourra, en faisant les deux expériences indiquées, constater un déplacement égal au $\frac{1}{5}$ de la distance des deux raies D.

Il serait plus avantageux d'observer une autre région du spectre où la réfrangibilité varie plus vite avec la longueur d'onde. Ainsi les trois raies du groupe b qui appartiennent au magnésium ont pour longueurs d'onde

$$b_1 = 0,5183,$$
$$b_2 = 0,5172,$$
$$b_3 = 0,5167.$$

La différence des longueurs d'onde des deux dernières, qui sont les plus voisines, est d'environ $\frac{1}{1000}$ de l'une d'elles, de sorte que dans cette région du spectre le déplacement dont nous parlons serait environ le $\frac{1}{5}$ de la distance des deux raies b_2 et b_3. On sait que dans les spectres de réfraction ces raies se montrent beaucoup plus écartées que celles du groupe D. On gagnerait encore à observer plus loin, vers la raie F ou dans le violet; je vais d'ailleurs fixer les idées par un calcul très-simple.

Désignons par n, n', n'' les indices de réfraction qui correspondent aux longueurs d'onde λ, λ', λ''. La loi de dispersion qui lie ces quantités ne se présente pas sous une forme simple, mais, quand il s'agit de

rayons aussi voisins, on peut se borner aux deux premiers termes de la formule de Cauchy

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} = f(\lambda).$$

Comme les longueurs d'onde λ' et λ'' diffèrent très-peu de λ, on peut calculer n' et n'' par les formules suivantes :

$$n' = f(\lambda - a\lambda) = f(\lambda) - a\lambda f'(\lambda),$$

$$n' = n + 2a\frac{B}{\lambda^2},$$

$$n'' = n - 2a\frac{B}{\lambda^2}.$$

On en déduit

$$n' - n'' = 4a\frac{B}{\lambda^2} = 4a(n - A).$$

Si le milieu considéré a la même dispersion que le spath d'Islande pour les rayons ordinaires, on pourra prendre

$$A = 1{,}6391.$$

L'indice de réfraction relatif à la raie D étant

$$n = 1{,}6585,$$

il en résulte

$$n' - n'' = 0{,}0000077.$$

Pour la raie F, au contraire, on a

$$n = 1{,}6679,$$

ce qui donnerait

$$n' - n'' = 0{,}0000115.$$

Le changement d'indice de réfraction est donc presque doublé.

Calculons maintenant le changement qu'éprouve la déviation elle-même dans un cas simple.

Considérons, par exemple, un prisme réfringent CDE (*fig.* 11) tel que la lumière tombe normalement sur la face d'entrée CD et n'éprouve de réfraction qu'à la sortie. Soit r l'angle du rayon incident avec la

normale à la face de sortie (c'est l'angle du prisme), i l'angle de rayon émergent IR avec la même normale, on a

$$\sin i = n \sin r.$$

Si l'indice de réfraction varie peu, l'angle r étant constant, on aura

$$\cos i \, di = \sin r \, dn,$$

ou bien, en appelant i' et i'' les angles relatifs aux indices n' et n'',

$$(i' - i'') \cos i = (n' - n'') \sin r,$$

$$(i' - i'') = (n' - n'') \frac{\sin r}{\cos i} = \frac{n' - n''}{n} \tan g\, i.$$

Pour le rayon ordinaire du spath d'Islande et la raie D on trouve

$$\frac{n' - n''}{n} = 1'' \text{ environ;}$$

donc

$$i' - i'' = 1'' \operatorname{tang} i.$$

Si l'angle i est égal à 85 degrés, c'est-à-dire si le rayon émergent fait avec la surface un angle de 5 degrés, on trouve

$$i' - i'' = 11'',5.$$

Avec un prisme de flint on pourrait avoir un angle d'environ 10 secondes pour la même inclinaison, et $2'',5$ seulement pour un rayon qui ferait avec la surface un angle de 20 degrés.

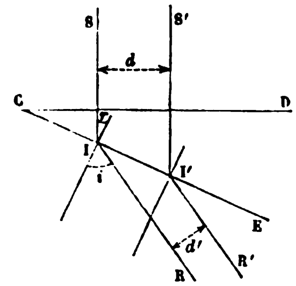
On voit qu'il y a tout avantage à se rapprocher de la surface ; mais il faut alors faire attention à une autre circonstance qui peut diminuer le bénéfice de cette disposition : c'est le rétrécissement du faisceau émergent. Les observations seront d'autant plus précises que le pouvoir optique de la lunette d'observation sera plus considérable, ou bien (si toute la lumière qui sort du prisme tombe sur l'objectif) que la largeur du faisceau sera plus grande ; le pouvoir optique utilisé est précisément proportionnel à cette largeur du faisceau émergent.

Soit donc d la largeur du faisceau incident, d' celle du faisceau réfracté, on a

$$d' = \mathrm{II'} \cos i = d \frac{\cos i}{\cos r}.$$

La meilleure condition sera donc celle pour laquelle la déviation $i' - i''$ sera la plus grande possible, par rapport à l'angle minimum

Fig. 11.



que la lunette puisse distinguer; cet angle minimum est en raison inverse du pouvoir optique, c'est-à-dire proportionnel au rapport $\frac{d}{d'}$. La condition la plus avantageuse correspond donc au cas où le rapport $\frac{i' - i''}{\frac{d}{d'}}$ est maximum, c'est-à-dire celui où le produit $(i' - i'')\,d'$ est maximum. Or on a

$$(i' - i'')\,d' = \frac{n' - n''}{n}\operatorname{tang} i \times d\,\frac{\cos i}{\cos r} = \frac{n' - n''}{n}\,d\,\frac{\sin i}{\cos r},$$

ou bien

$$(i' - i'')\,d' = \frac{n' - n''}{n}\,d\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 i} - \frac{1}{n^2}}}.$$

Pour que cette expression soit un maximum, il faut que $\sin i$ soit maximum, c'est-à-dire que i soit aussi voisin que possible de 90 degrés.

Ainsi, malgré la diminution de pouvoir optique qui provient du rétrécissement du faisceau réfracté, le maximum de sensibilité aura encore lieu quand on observera le plus près possible de la surface.

Toutefois on ne tardera pas à être arrêté dans cette voie pour d'autres motifs, d'abord à cause de l'affaiblissement progressif de la lumière, et surtout à cause de l'exagération des défauts de la surface de sortie.

En effet, l'emploi d'un seul prisme, disposé comme je l'ai indiqué, permet d'obtenir une dispersion considérable avec une seule surface réfringente. On n'a donc à soigner que le travail de cette seule surface et tout serait à l'avantage de l'expérience (simplicité de l'appareil, pureté des images, etc.) si l'on pouvait obtenir un prisme parfaitement homogène terminé par une surface parfaitement plane. Malheureusement les défauts de la surface ont une influence exagérée sur les rayons qui sont voisins d'être rasants; c'est là une grave difficulté, qu'il faut tâcher de tourner par le soin apporté au travail et par certains procédés d'expérimentation, comme on le verra plus loin.

Remarquons encore qu'il est impossible de se placer exactement dans le cas d'un prisme immobile comme nous l'avons supposé, parce que dans toutes les observations le prisme et l'observateur seront nécessairement entraînés par le mouvement de la Terre. Néanmoins notre calcul trouvera son application.

Influence du déplacement du prisme. — Si la réfraction de la lumière s'effectue dans un milieu mobile, comme nous allons le supposer maintenant, il est nécessaire de s'appuyer sur un principe nouveau pour évaluer l'influence qu'exerce le transport du milieu pondérable transparent sur la propagation des ondes lumineuses.

La question a été posée par Arago ([1]). En s'appuyant sur la théorie de l'émission, il avait calculé que les rayons émanés de deux étoiles fixes, situées aux deux extrémités de la droite suivant laquelle marche la Terre en vertu de son mouvement de translation, doivent éprouver dans un prisme des réfractions inégales; ce calcul conduirait à un déplacement de plusieurs secondes (près de 60) qu'on aurait pu observer avec des appareils médiocrement précis. Arago l'a essayé sans succès en se servant d'un prisme achromatisé; malheureusement il n'a laissé aucun renseignement expérimental sur la manière dont l'observation a été faite, et il paraît difficile d'apprécier si cette observation pouvait être concluante.

Les expériences d'Arago sur la lumière des étoiles fut pour Fresnel

---

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. VIII, p. 326 (1839). Je ne connaissais pas cette Note d'Arago quand j'ai publié la première partie de ce travail (*voir* p. 158.)

l'occasion d'un de ses Mémoires les plus remarquables. Pour expliquer le résultat d'Arago dans la théorie des ondulations, Fresnel admet qu'un milieu pondérable en mouvement entraine avec lui, non pas la totalité de l'éther qu'il renferme, mais seulement l'excès de cet éther sur celui qui existerait dans le même espace en l'absence de la matière pondérable. Fresnel avait été conduit, en effet, à admettre, pour expliquer la réflexion et la réfraction, que la densité de l'éther est moins grande dans le vide que dans les milieux réfringents. De cette hypothèse du transport partiel de l'éther il déduit, par suite de raisonnements que j'ai déjà rappelés ([1]), que la vitesse de propagation U' de la lumière dans un milieu pondérable en mouvement est exprimée par la formule suivante :

$$(1) \qquad U' = U + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

dans laquelle U est la vitesse de propagation de la lumière considérée dans le même milieu en repos, u la composante de la vitesse du milieu parallèle à la propagation et n l'indice de réfraction.

Sans discuter les raisonnements de Fresnel, nous pouvons d'abord admettre la formule finale (1) et voir comment on en déduira la réfraction apparente qu'éprouve, dans un prisme mobile avec la Terre, la lumière qui provient d'une étoile fixe. Nous considérerons avec Fresnel quelques cas particuliers pour en déduire ensuite la solution générale.

1° La Terre se meut perpendiculairement au plan d'incidence. Supposons que la lumière passe d'un milieu réfringent dans le vide.

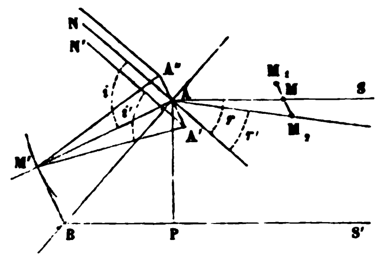
Soient AB (*fig.* 12) la surface de séparation, SA et S'B deux rayons qui parviennent à la surface au bout d'intervalles du temps différant d'une unité. On sait que, pour obtenir le rayon réfracté, il suffit de mener par le point B un plan tangent à la sphère décrite du point A comme centre avec un rayon égal à V, la vitesse de la lumière dans le vide, et de joindre le point A au point de contact : on obtient ainsi le rayon réfracté AM'.

Soient A″A′ la direction du transport du milieu et A″A $= u$ sa vi-

([1]) *Loc. cit.*, p. 160.

tesse. Pendant que la vibration se propage de A en M', le point A est venu en A' de sorte que la direction apparente du rayon réfracté est A'M'; ce rayon fait avec la normale l'angle $i' =$ M'A'N' pendant que le rayon réfracté absolu fait l'angle $i =$ M'AN.

Fig. 12.



Dans le triangle M'AA' la droite AA' est une quantité infiniment petite de l'ordre de l'aberration par rapport à M'A; l'oblique M'A' ne diffère donc de la perpendiculaire M'A que d'un infiniment petit du second ordre, et par conséquent l'angle i', que fait cette droite avec la normale à la surface, ne diffère lui-même de l'angle i que d'un infiniment petit du second ordre.

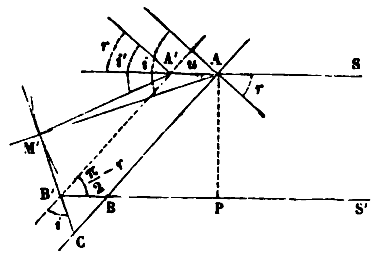
De même, pendant que la vibration parcourt dans le milieu l'espace MA = U parallèlement aux rayons incidents, cette vibration est entraînée par le milieu lui-même. Le point dont la vibration est parvenue en A n'est pas le point M, mais un autre point M_1 situé sur une perpendiculaire MM_1 à MA. L'entraînement de la vibration n'étant pas égal à celui du milieu, le point physique du milieu, qui était tout à l'heure en M_1, est venu quelque part en M_2, de sorte que la direction apparente du rayon incident est M_2A. Sans qu'il soit nécessaire de calculer la distance MM_2, il suffit de remarquer qu'elle est de l'ordre de l'aberration et que, par suite, les deux angles r' et r ne peuvent différer que de l'ordre du carré de l'aberration. Entre les deux angles i et r on a la relation $\sin i = n \sin r$, et cette même relation existera encore entre les angles i' et r' si l'on néglige le carré de l'aberration.

2° La Terre se meut parallèlement aux rayons incidents.

Soient SA et S'B' (*fig.* 13) deux rayons qui parviennent à la surface à des intervalles de temps distants d'une unité. Pendant ce même

temps le point A de la surface est venu en A′ à la distance $AA' = u$; le rayon réfracté absolu est AM′ et le rayon apparent est A′M′ : ils font

Fig. 13.



avec la normale des angles i et i'. Le rayon incident apparent se confond avec le rayon absolu.

Le triangle M′AA′ donne

$$\frac{AA'}{AM'} = \frac{u}{V} = \frac{\sin(i'-i)}{\sin(i'-r)} = a,$$

d'où

$$\sin(i'-i) = a\sin(i'-r).$$

Cette équation montre que les angles i et i' diffèrent de l'ordre de l'aberration. On en déduit, en négligeant le carré de a^2,

$$\sin i = \sin i' - a\sin(i'-r)\cos i'. \tag{3}$$

Pour trouver une autre relation entre les angles i, r et i', il faut évaluer l'espace PB′ parcouru par la lumière dans le milieu pendant l'unité de temps. En adoptant la formule de Fresnel, on aura

$$PB' = U + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad PB = PB' - u = U - \frac{u}{n^2}.$$

Les triangles AM′C, ABP, BCB′ donnent

$$\frac{V}{\sin i} = AB + BC, \tag{4}$$

$$AB = \frac{BP}{\sin r} = \frac{1}{\sin r}\left(U - \frac{u}{n^2}\right),$$

$$BC = u\frac{\cos(i-r)}{\sin i}.$$

L'équation (4) devient alors

$$\frac{V}{\sin i} = \frac{U}{\sin r} - \frac{u}{n^2 \sin r} + \frac{u \cos(i-r)}{\sin i}.$$

Remplaçons maintenant U par $\frac{V}{n}$, et divisons par V pour introduire l'aberration $a = \frac{u}{V}$, et nous obtenons

$$n \sin r[1 - a\cos(i-r)] = \sin i - \frac{a}{n}\sin i.$$

Comme $\sin i$ ne diffère de $n \sin r$ que d'une quantité de l'ordre de l'aberration, on peut modifier le dernier terme et écrire

$$n \sin r[1 - a\cos(i-r)] = \sin i - a \sin r.$$

Remplaçons maintenant $\sin i$ par sa valeur tirée de l'équation (3), il viendra

$$\begin{aligned} n \sin r[1 - a\cos(i-r)] &= \sin i' - a[\sin r + \sin(i'-r)\cos i'] \\ &= \sin i' - a \sin i' \cos(i'-r) \\ &= \sin i'[1 - a\cos(i'-r)]. \end{aligned}$$

En supprimant le facteur commun, et négligeant les termes de l'ordre de a^2, il reste

$$\sin i' = n \sin r.$$

Il y a donc entre les angles apparents i' et r la même relation que si le prisme était immobile.

3° La Terre se meut parallèlement au plan d'incidence et perpendiculairement aux rayons incidents.

Les deux rayons SA et S'B' (*fig.* 14) parviennent encore à la surface à des époques distantes d'une unité, pendant que le milieu parcourt l'espace AA'. Le rayon réfracté absolu est AM, le rayon apparent A'M.

Le triangle AA'M donne

$$\frac{AA'}{MA} = \frac{u}{V} = a = \frac{\sin(i-i')}{\cos(i'-r)}.$$

On en déduit

$$\sin(i - i') = a\cos(r' - r),$$

$$\sin i = \sin i' + a\cos(i' - r)\cos i'. \tag{5}$$

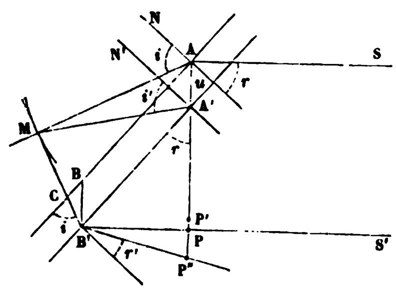
Les triangles AMC, A'B'P, BCB' donnent encore

$$\frac{V}{\sin i} = AB + BC, \tag{6}$$

$$AB = A'B' = \frac{B'P}{\sin i} = \frac{U}{\sin r},$$

$$BC = u\,\frac{\sin(i - r)}{\sin i}.$$

Fig. 14.



On en déduit, en substituant ces dernières valeurs dans l'équation (6) et faisant les réductions,

$$n\sin r = \sin i\,[1 + a\sin(i - r)]. \tag{6'}$$

Pour déterminer la direction apparente des rayons incidents, on remarquera que, pendant que la vibration parcourt l'espace PB', le point P de l'éther se déplace lui-même, de sorte que le point dont la vibration est parvenue en B' est un point P' situé à une distance PP' égale à l'entraînement que subit la vibration pendant l'unité de temps. On a donc

$$P'P = u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Pendant ce temps, le point P' du milieu s'est lui-même transporté

en P″ à une distance égale à u, et l'on a

$$PP'' = u - P'P = \frac{u}{n^2}.$$

La direction apparente du rayon incident est P″B′; elle fait avec la normale l'angle r' qu'il est aisé de calculer. On aura

$$\frac{u}{n^2} = U \operatorname{tang}(r - r') = \frac{V}{n} \operatorname{tang}(r - r'),$$

ou bien

$$r - r' = \frac{a}{n},$$

$$(7) \qquad \sin r' = \sin r - \frac{a}{n} \cos r.$$

Les équations (5) et (6)′ donnent

$$n \sin r = \sin i' + a \cos r,$$

ou bien

$$\sin i' = n \left(\sin r - \frac{a}{n} \cos r\right).$$

En comparant cette équation avec l'équation (7), il vient

$$\sin i' = n \sin r'.$$

Il y a donc entre les angles apparents d'incidence et de réfraction la même relation que si le prisme était immobile.

4° Enfin, si le mouvement du prisme est quelconque, on le remplacera par trois composantes rectangulaires dirigées comme celles que nous avons considérées : chacune des composantes est sans influence; il en sera de même pour le mouvement résultant.

On conclut de là que :

« La réfraction apparente que subit, dans un prisme mobile avec la Terre, la lumière émise par une source fixe est identique à celle que l'on observerait si le prisme et l'observateur étaient immobiles. »

Cet énoncé est la traduction de l'expérience d'Arago.

J'ai reproduit tous les calculs relatifs à l'expérience d'Arago, parce que la formule de Fresnel, qui fournit le point de départ de ces calculs, va être l'objet de toute la discussion dans ce nouveau Mémoire

Il semble en effet résulter de ce qui précède que la réfraction ne peut être d'aucun secours pour la question qui nous occupe, la réfraction apparente étant toujours égale à la réfraction qui aurait lieu dans le cas où le prisme et l'observateur seraient en repos. Le mouvement de la Terre, en particulier, n'aurait aucune influence sur la réfraction de la lumière dans un prisme, et c'est précisément le contraire qui est vrai. Si l'expérience d'Arago, interprétée comme elle me paraît l'avoir toujours été, était exacte, ce serait une bonne fortune; il suffit, pour s'en convaincre, d'examiner les conséquences qu'elle entraînerait.

Si le mouvement du prisme et de l'observateur n'a aucune influence sur la réfraction de la lumière qui leur provient d'une source fixe, il en résulte que le prisme sera capable de mettre en évidence le mouvement *absolu* d'une source de lumière. La longueur d'ondulation étant modifiée par le mouvement de la source et la réfraction (absolue dans un prisme fixe, ou apparente dans un prisme mobile) ne dépendant que de la longueur d'onde, il est clair en effet que la déviation augmentera ou diminuera quand la longueur d'onde sera elle-même modifiée, et cela d'une quantité précisément correspondante à la variation de longueur d'onde.

Ainsi il suffirait d'observer la lumière émise par une source terrestre et de la faire cheminer soit dans le sens, soit en sens contraire du mouvement de translation de la Terre pour obtenir un changement de déviation double de celui qui serait dû au mouvement de la source; et, même dans ce cas, les changements de réfraction seraient dus, non pas seulement au mouvement de la Terre autour du Soleil, mais à son mouvement *absolu* dans l'espace, ce qui pourrait conduire aux résultats les plus inattendus. De même, en examinant à différentes époques de l'année la lumière qui nous vient du Soleil, on pourrait savoir si le mouvement du système solaire tout entier a une composante sensible parallèle au plan de l'écliptique, etc. De même encore, la réfraction de la lumière des étoiles nous permettrait de déterminer la composante du mouvement *absolu* de ces astres parallèlement à la direction des rayons qu'ils nous envoient.

Sans nous égarer à suivre de pareilles conséquences, examinons l'expérience d'Arago en elle-même et cherchons si l'on peut la soumettre à un contrôle expérimental. La solution est très-simple.

Considérons deux sources de lumière identiques, l'une sur la Terre, une flamme d'alcool salé par exemple, et l'autre sur une étoile fixe, du sodium en vapeurs incandescentes. Les ondes lumineuses qui proviennent de l'étoile ne sont modifiées par aucune cause; celles qui proviennent de la source terrestre sont dilatées ou resserrées suivant le sens dans lequel on examine la propagation. Ces deux systèmes d'ondes, en tombant sur un prisme réfringent mobile avec la Terre, n'y peuvent pas subir la même réfraction. Si l'expérience d'Arago est exacte, si les rayons émis par l'étoile n'éprouvent aucun changement de réfraction, il est impossible que ceux qui proviennent de la source terrestre n'en éprouvent pas; si, au contraire, il est bien démontré que la réfraction apparente des rayons émis par une source terrestre ne subit aucune altération dans quelque direction qu'ils se propagent, il en résultera, comme conséquence nécessaire, que l'observation d'Arago ne peut être exacte.

C'est ainsi que je me suis posé la question; j'ai cherché par différents moyens si l'on pouvait mettre en évidence le mouvement de la Terre par l'observation des sources de lumière terrestres.

X. — *Expériences sur la réfraction.*

Pour voir si le mouvement de la Terre a une influence sur la réfraction des rayons émis par une source terrestre, il faut faire cheminer ces rayons d'abord dans le sens du mouvement de la Terre, puis en sens contraire. On aura ainsi doublé l'effet, et le déplacement sera dû, s'il existe, à un changement de longueur d'onde de $\frac{1}{5000}$; cela correspond, comme on l'a vu plus haut, au $\frac{1}{5}$ de la distance des deux raies D ou des raies b_2 et b_1 du magnésium.

On peut disposer son appareil sur une table mobile, autour d'un axe vertical, et, en faisant l'expérience à midi ou à minuit, diriger la source alternativement vers l'est ou vers l'ouest. On obtiendra à midi un changement de déviation dans un certain sens, et à minuit un changement en sens contraire.

Un autre procédé consiste à profiter du mouvement de rotation de la Terre. Si l'appareil est installé à poste fixe, de manière que la lumière

incidente chemine de l'ouest à l'est, par exemple, cette propagation se fera à minuit dans le sens du mouvement de la Terre, et à midi dans le sens directement opposé. Il suffira donc de venir observer le phénomène à des heures convenables, sans toucher aux instruments, et, si l'on peut éliminer les variations accidentelles, on pourra juger s'il y a ou non une différence de pointé.

J'ai employé ces deux méthodes successivement.

J'ai toujours eu recours à la réfraction produite par un seul prisme, taillé de façon que les rayons incidents, étant à peu près normaux à la face d'entrée, fussent presque rasants à la face de sortie. On peut ainsi, avec une seule réfraction, obtenir une dispersion considérable; on n'a à se préoccuper que d'une surface, et surtout le phénomène correspond alors à un cas très-simple qui se prêtera facilement aux discussions théoriques. Il va sans dire que l'angle du prisme n'a pas besoin pour cela d'être absolument exact : il suffit évidemment que la face d'entrée soit *à peu près* normale aux rayons incidents; on donnera ensuite au prisme des déplacements à droite et à gauche, de manière à placer les rayons émergents dans les conditions qui conviendront le mieux.

Le choix de la source de lumière a aussi de l'importance. Comme il est difficile ou plutôt incommode de se procurer les raies de la soude avec un grand éclat, et que la réfraction rasante affaiblit considérablement la lumière, j'ai eu recours, dans mes premières expériences, à une étincelle entre des fils de magnésium; on obtient ainsi dans le spectre trois raies brillantes vertes d'une grande intensité. Ces raies s'écartent de plus en plus quand on fait rapprocher le rayon réfracté de la surface; mais en même temps l'éclat diminue rapidement, et surtout la pureté des images est profondément troublée. Les raies deviennent tordues, estompées, se détachant mal sur un fond obscur, ce qui rend l'observation difficile. Cet inconvénient s'est présenté du moins dans mes premières expériences; les prismes dont je disposais alors n'ayant pas d'assez grandes dimensions et n'étant pas assez homogènes, je ne pouvais observer qu'avec une lunette de spectroscope ordinaire d'un faible grossissement, et l'apparence du phénomène n'était pas assez satisfaisante pour que l'on pût en déduire une conclusion avec sécurité.

Néanmoins l'expérience a été répétée un grand nombre de fois, et le résultat a été souvent négatif. Plusieurs observations cependant ont

indiqué un changement de déviation appréciable, correspondant à un accroissement de réfraction pour le cas où les rayons incidents chemineraient dans le sens du mouvement de la Terre, et ce changement était de même ordre que celui qu'indiquait le calcul.

Mais de nouvelles expériences, répétées dans des conditions plus satisfaisantes, m'ont conduit à une conclusion diamétralement opposée : le déplacement cherché est rigoureusement nul, ou du moins, s'il existe, il est extrêmement petit par rapport à celui qu'indiquait le calcul.

J'ai d'abord apporté quelques changements aux procédés d'observation :

1° Les prismes avaient des dimensions considérables, afin que le faisceau émergent pût encore conserver une certaine largeur, malgré le rétrécissement dû à la réfraction rasante.

2° Au lieu de pointer le phénomène avec un fil de réticule et d'évaluer ensuite par estime le déplacement de l'image pour les deux directions opposées de l'appareil, je me suis servi d'une lunette à réticule micrométrique. On pointe alors l'image dans les différentes circonstances, sans se préoccuper de l'effet attendu, et le changement, s'il y a lieu, est indiqué par les lectures du tambour de la vis micrométrique.

3° Enfin le pointé d'une raie brillante sur un fond noir n'est pas commode : on ne peut distinguer les fils du réticule que si la lumière est très-éclatante et les images assez larges, à moins qu'on n'éclaire le champ par une lumière étrangère, et encore ce dernier moyen ne peut pas être employé quand les raies ont un faible éclat, comme celles que donne une flamme à la soude.

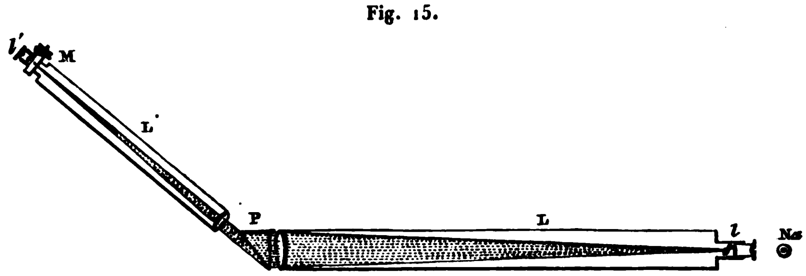
J'ai cherché à produire des raies obscures sur fond brillant. L'idée la plus simple était d'utiliser les procédés de renversement des raies brillantes qui jouent un si grand rôle dans l'Analyse spectrale; mais ces procédés n'étaient pas assez rapides et ne permettaient pas des observations suivies comme celles que je voulais entreprendre. J'ai trouvé alors un moyen d'une simplicité extrême, qui consiste à remplacer la fente du collimateur par un fil d'araignée tendu sur une large ouverture, et à éclairer le tout par une flamme chargée de vapeur de sodium. Après réfraction de cette lumière dans un prisme, on obtient au foyer de la lunette d'observation deux images de l'ouverture produites par les deux lumières homogènes qui émanent de la flamme jaune, et sur

chacune de ces images un trait noir qui correspond au fil d'araignée. Les deux traits noirs voisins qu'on obtient ainsi rappellent tout à fait le renversement des raies brillantes, avec cette différence que le fond est uniformément éclairé en jaune au lieu d'être formé par différentes couleurs du spectre.

Retournement de l'appareil. — Dans une première série d'expériences, les appareils étaient installés sur une table mobile autour d'un axe vertical, qui permettait de diriger la lumière alternativement vers l'est ou vers l'ouest.

Voici la disposition expérimentale (*fig.* 15) :

Fig. 15.



N_a est un brûleur de Bunsen dans lequel on met un peu de phosphate de soude;

L lunette astronomique dont l'objectif a 10 centimètres de diamètre, $1^m,10$ de longueur focale;

f fil vertical du foyer de cette lunette; *l* est une loupe qui n'est pas nécessaire : elle empêche seulement les sels projetés par la flamme de toucher le fil *f*;

P prisme réfringent; la face d'entrée a 10 centimètres de longueur et 10 centimètres de hauteur; l'angle du prisme est $37°53'50''$, et l'indice de réfraction pour la raie D 1,62508;

L' lunette astronomique dont l'objectif a 55 millimètres de diamètre et 620 millimètres de longueur focale;

M micromètre portant deux fils en croix et mobile à l'aide d'une vis; le pas de la vis est de $0^{mm},4$, et le tambour porte cent divisions : un tour équivaut donc à 129 secondes, et une division du tambour à $1'',29$.

On peut amener le fil du réticule sur l'une des deux images noires *f'*

et f'' du fil f, et, pendant un intervalle de temps assez court pour que les variations de température n'aient pas d'influence appréciable, faire plusieurs pointés, en dirigeant successivement l'appareil dans deux sens opposés.

Dans certains cas, le fil du réticule était parallèle aux images f' et f''; d'autres fois, on a fait tourner le micromètre de 45 degrés pour mettre les fils du réticule en croix avec les raies noires : c'est un mode de pointé qui est préféré par certains observateurs.

L'expérience a été faite un grand nombre de fois en dirigeant alternativement l'appareil vers l'est et vers l'ouest, à midi et à minuit. Comme le résultat a été constamment négatif, je pourrais me borner à citer le fait; mais, pour donner une idée de la précision que comportaient les expériences, je vais rapporter quelques mesures.

Première expérience. — 3 mars 1872; 11^h 15^m du matin.

Micromètre à 45 degrés. On fait plusieurs pointés dans chaque position, en déplaçant toujours le micromètre dans le même sens pour éviter tout effet de temps perdu. Les nombres indiqués sont les divisions du tambour du micromètre.

Source à l'ouest.		Source à l'est.	
60,8			
60,8			
60,5	Moyenne, 60,52		
60,0			
60,5		60,5	
		59,5	
		59,8	Moyenne, 59,76
		59,5	
59,3		59,5	
59,2			
60,5	Moyenne, 59,64		
60,2			
59,0			
		59,0	
		60,0	
		59,2	Moyenne, 59,48
		59,0	
		60,2	

Fin des observations, 11^h 45^m.

Il y a, comme on le voit, une diminution lente des lectures qui peut tenir à une variation très-faible de température. La variation des moyennes paraît bien indépendante de la direction de l'appareil; on le voit encore mieux en les comparant par la méthode des alternatives :

$$\frac{60,52+59,64}{2}=60,08 \quad \text{au lieu de} \quad 59,76,$$

$$\frac{59,76+59,48}{2}=59,62 \quad \text{au lieu de} \quad 59,64.$$

Or, avec cette disposition, la distance des deux raies f' et f'' correspondait à cinquante divisions du tambour ou un demi-tour de vis, c'est-à-dire environ $65'' = 1'5''$. Le déplacement, s'il existe, n'est certainement pas d'un cinquième de division du tambour, c'est-à-dire de $\frac{1}{250}$ de la distance des deux raies D. Comme le déplacement indiqué par le calcul est le cinquième de la distance des deux raies D, il en résulte que la précision des expériences est cinquante fois plus grande que la quantité qu'il s'agissait de mettre en évidence.

Deuxième expérience. — 4 mars 1872; 11 heures du matin.

Source à l'ouest.		Source à l'est.	
85	Moyenne, 85,10		
85			
84,5			
86			
		85	Moyenne, 84,90
		85	
		84,5	
		85	

Je citerai encore une autre expérience faite à peu près à la même époque (je n'ai pas noté la date), à $2^h 30^m$ du soir, par M. Fizeau :

Source à l'ouest.		Source à l'est.	
44,7	Moyenne, 46,3		
47,2			
46,3			
		46,6	Moyenne, 46,7
		46,2	
		47,2	

La distance des raies D correspondait, dans cette expérience, à quarante-quatre divisions du tambour.

Expériences comparatives de midi et de minuit. — La plus grande difficulté de ces expériences était d'éviter les changements de réfraction dus aux variations de température et à toutes les causes inconnues. L'appareil a été installé au laboratoire de chimie de l'École Normale supérieure, dans une cave complétement close, ne communiquant avec l'extérieur que par la porte d'entrée, et dans laquelle on ne pénétrait que deux fois par jour, juste pendant le temps nécessaire aux observations.

La lunette servant de collimateur avait un objectif de 108 millimètres et une longueur focale de $1^{m},30$.

Le prisme avait, sur sa face d'entrée, une longueur de 13 centimètres et une hauteur de 10 centimètres. L'angle réfringent était de $32^{\circ}55'25''$, et l'indice de réfraction pour la raie D de 1,63014 : il était donc un peu plus réfringent que celui de l'expérience précédente.

La lunette d'observation était de même dimension que celle qui a été décrite plus haut.

Pour donner à cette installation une grande stabilité, j'ai fait bâtir quatre colonnes en pierres cimentées avec du plâtre, et sur ces colonnes on a scellé deux dalles de pierre. Les instruments ayant été réglés par des tâtonnements successifs, toutes les pièces ont été fixées en place. Le collimateur avait été scellé au plâtre sur les deux dalles; le prisme et la lunette ont été fixés avec de l'arcanson qu'on a coulé sur tous les supports. Auprès du prisme était suspendu un thermomètre divisé en cinquantièmes de degré, et l'on observait ce thermomètre avec un viseur posé sur la dalle. La source de lumière était un bec de Bunsen, dans la flamme duquel on maintenait une petite quantité de phosphate de soude. Enfin au foyer principal du collimateur on avait placé, non pas un simple fil vertical, mais un réticule formé de cinq filets verticaux, comme dans certaines lunettes astronomiques.

On obtenait ainsi dans le champ d'observation de la lunette cinq groupes de doubles raies obscures sur fond brillant, et l'on observait l'un ou l'autre de ces différents groupes.

Il n'est pas inutile d'ajouter quelques détails sur la manière de régler l'expérience.

Si l'on plaçait immédiatement le prisme de façon que les rayons émergents fussent très-voisins de la surface de sortie, il serait fort difficile de mettre au point la lunette, parce que le faisceau réfracté est *astigmate*, à cause des imperfections de la surface, si faibles qu'elles soient, et le point où se produit l'image d'un fil vertical du collimateur est souvent en dehors des limites où peut se mouvoir l'oculaire de la lunette. Pour trouver cette image à coup sûr, on a profité de ce que le réticule du collimateur pouvait être éloigné ou rapproché par une vis à crémaillère. On commençait par mettre la lunette au point en plaçant le prisme dans le voisinage du minimum de réfraction, puis on tournait le prisme de petites quantités à la fois en déplaçant en même temps la lunette, et, à l'aide de la vis, on déplaçait le réticule de façon que l'image se produisît toujours dans le champ de vision de la lunette. On allait ainsi de proche en proche jusqu'à ce que l'accroissement de dispersion qu'on aurait obtenu en continuant plus loin aurait été compensé par une trop grande déformation des images : on scellait alors toutes les pièces mobiles.

Malgré toutes ces précautions, on a été plus de deux mois avant de pouvoir faire aucune observation régulière. Sans que la température parût éprouver de changements notables, les déviations variaient tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, quelquefois d'une manière brusque, et ces variations d'un jour à l'autre étaient trop grandes pour qu'il fût possible de les éliminer par un système quelconque de compensations. On ne pouvait pas songer à faire des observations fréquentes dans le cours de la journée ou de la nuit, parce qu'il fallait, en entrant dans la cave, allumer deux becs de gaz, et qu'un séjour trop prolongé ou trop fréquent produisait une grande élévation de température. Ces variations étaient dues sans doute au travail des ciments et des mastics, peut-être à une influence de l'état hygrométrique sur ces matières. L'appareil n'est jamais parvenu à une immobilité complète, mais les variations sont devenues beaucoup plus faibles, et l'on a pu éliminer leur influence.

Voici maintenant comment les observations étaient faites :

En entrant dans la cave, on lisait la température, on pointait cinq

fois l'une des raies de l'un des groupes, puis cinq fois l'une des raies d'un autre groupe; on répétait ensuite les premières lectures, puis les deuxièmes; on lisait de nouveau la température, on éteignait tout et l'on fermait la cave.

Pour donner une idée de ces observations, je vais reproduire ici quelques pages de mon carnet d'observations. T désigne la température.

Mercredi 7 février 1872; 11^{h} 30^{m} du soir.

$$T = 11^\circ{,}43.$$

$$1^{\text{er}}\ \text{groupe.}\left\{\begin{array}{l}\overset{\text{tours}}{10{,}15}\\ 10{,}15\\ 10{,}165\\ 10{,}155\\ 10{,}15\end{array}\right\}\ \text{Moyenne,}\ 10{,}155$$

$$2^{\text{e}}\ \text{groupe.}\left\{\begin{array}{l}\overset{\text{tours}}{3{,}12}\\ 3{,}135\\ 3{,}135\\ 3{,}125\\ 3{,}13\end{array}\right\}\ \text{Moyenne,}\ 3{,}129$$

$$1^{\text{er}}\ \text{groupe.}\left\{\begin{array}{l}10{,}15\\ 10{,}135\\ 10{,}165\\ 10{,}147\\ 10{,}15\end{array}\right\}\ \text{Moyenne,}\ 10{,}150$$

$$2^{\text{e}}\ \text{groupe.}\left\{\begin{array}{l}3{,}12\\ 3{,}13\\ 3{,}12\\ 3{,}12\\ 3{,}135\end{array}\right\}\ \text{Moyenne,}\ 3{,}125$$

$$T = 11^\circ{,}52.$$

Moyennes.

$$T = 11^\circ{,}47.$$

1$^{\text{er}}$ groupe..........	10,153
2$^{\text{e}}$ »	3,127

Jeudi 8 février 1872; $11^h 45^m$ du matin.

$T = 11^\circ,26.$

$$1^{er}\text{ groupe.}\left\{\begin{matrix}10,15\\10,145\\10,15\\10,13\\10,155\end{matrix}\right\}\text{Moyenne, } 10,146$$

$$2^e\text{ groupe.}\left\{\begin{matrix}3,12\\3,115\\3,115\\3,11\\3,13\end{matrix}\right\}\text{Moyenne, } 3,118$$

$$1^{er}\text{ groupe.}\left\{\begin{matrix}10,125\\10,155\\10,15\\10,15\\10,148\end{matrix}\right\}\text{Moyenne, } 10,146$$

$$2^e\text{ groupe.}\left\{\begin{matrix}3,11\\3,10\\3,125\\3,12\\3,115\end{matrix}\right\}\text{Moyenne, } 3,115$$

$T = 11^\circ,30.$

Moyennes.

$T = 11^\circ,28.$

1^{er} groupe	10,146
2^e »	3,117

Jeudi 8 février; $11^h 45^m$ du soir.

$T = 11^\circ,13.$

$$1^{er}\text{ groupe.}\left\{\begin{matrix}10,131\\10,125\\10,135\\10,13\\10,135\end{matrix}\right\}\text{Moyenne, } 10,133$$

$$2^e\text{ groupe.}\left\{\begin{matrix}3,118\\3,11\\3,11\\3,115\\3,12\end{matrix}\right\}\text{Moyenne, } 3,116$$

1er groupe.	10,14 10,135 10,12 10,135 10,138	Moyenne, 10,134
2e groupe.	3,12 3,125 3,13 3,11 3,11	Moyenne, 3,119

T = 11°,20.

Moyennes.

T = 11°,16.

1er groupe..........	10,133
2e »	3,117

Ces exemples suffiront pour donner une idée de la précision des pointés. Voici maintenant comment on peut comparer les moyennes. Je me servirai des mêmes nombres, en y ajoutant ceux des deux jours suivants :

Date.	Heure.	Moyennes.		Excès sur la 1re expérience.
Mercredi 7 février..	Minuit.	T.............	11°,47	»
		1er groupe.....	10,153	»
		2e »	3,127	»
Jeudi 8 février......	Midi...	T.............	11,28	−0,19
		1er groupe.....	10,146	−0,007
		2e »	3,117	−0,010
	Minuit.	T.............	11,16	−0,12
		1er groupe.....	10,133	−0,020
		2e »	3,117	−0,010
Vendredi 9 février...	Midi...	T.............	11,7	+0,23
		1er groupe.....	10,146	−0,007
		2e »	3,113	−0,014
	Minuit.	T.............	11	−0,47
		1er groupe.....	10,154	+0,001
		2e »	3,122	−0,005

Date.	Heure.	Moyennes.		Excès sur la 1re expérience.
Samedi 10 février....	Midi...	T............	10°,90	−0,57
		1er groupe.....	10,153	0
		2e »	3,123	−0,004
	Minuit.	T......	10,86	−0,61
		1er groupe.....	10,177	+0,024
		2e » . ..	3,143	+0,016

L'observation des deux groupes présente cet avantage que, si l'on obtient des deux côtés la même différence de pointé, on sera assuré que l'effet n'est pas dû à une erreur de lecture; la dernière colonne montre que les résultats des observations faites sur les deux groupes d'images sont entièrement concordants.

On voit encore que les variations ne peuvent pas être attribuées aux changements de température seulement, car les lectures du micromètre et celles du thermomètre varient tantôt dans le même sens, tantôt en sens contraires.

Y a-t-il maintenant une différence sensible entre l'observation de *midi* et celle de *minuit?* En prenant les observations de jeudi et de vendredi, par exemple, on voit que la somme de toutes les diminutions par rapport à l'observation du mercredi pour les deux groupes, dans les expériences de midi, est 0,038, et la somme des diminutions, pour les expériences de minuit, est 0,034. Comme on ajoute les quatre observations, il ne resterait, pour chacune d'elles, qu'une différence de $\frac{1}{1000}$ de tour, c'est-à-dire $\frac{1}{10}$ de division du tambour.

Toutes les observations seraient loin de donner la même concordance; mais on peut assurer qu'entre les lectures de midi et de minuit, abstraction faite de toutes les causes d'erreur, il n'y a pas une différence de $\frac{1}{2}$ division du tambour. Or, dans ces expériences, le réticule était parallèle aux raies, et la distance des deux raies D correspondait à 30 divisions du tambour, c'est-à-dire 39 secondes environ. L'erreur possible est donc moindre de $\frac{1}{60}$ de la distance des deux raies D, et par conséquent le $\frac{1}{12}$ de la différence indiquée par le calcul.

Pour permettre à l'appareil de prendre une certaine stabilité et en même temps pour répondre à l'objection qu'on pourrait tirer du mou-

vement de translation du système solaire, j'ai fait plusieurs séries d'observations à différentes époques de l'année. Voici les plus régulières :

12 observations.	La	1re série	va du	27 janvier	au	1er février	1872
15	»	2e	»	1er février		10 février	»
8	»	3e	»	17 février		21 février	»
7	»	4e	»	18 août		22 août	»
10	»	5e	»	24 sept.		28 sept.	»
52							

Le mode de pointé n'a pas toujours été le même dans toutes les séries. Comme le réticule du micromètre était formé de deux fils verticaux coupés par un fil transversal, on a placé, tantôt un fil du micromètre sur une raie noire, tantôt la raie noire entre les deux fils du micromètre, tantôt un fil entre les deux raies voisines, tantôt les fils du micromètre à 45 degrés sur une raie. Il est bien entendu que le mode de pointé adopté au début d'une série était conservé jusqu'à la fin.

Il eût peut-être été utile de laisser encore l'appareil en place; mais la vapeur d'eau dégagée par la combustion du gaz avait fini par produire dans la petite cave une humidité excessive; les objectifs et le prisme étaient ternis par une sorte de végétation microscopique; les fils du réticule étaient envahis par un entrelacement de filaments plus minces, comme si de nouvelles araignées étaient venues y établir leurs toiles. Les observations n'étaient plus possibles; il aurait fallu procéder à un nettoyage complet et à une installation nouvelle, et j'aurais aiusi perdu en partie le bénéfice de la stabilité déjà acquise par l'appareil. D'ailleurs je n'y avais plus d'intérêt, la question me paraissant résolue, et j'ai mis fin aux observations.

La reproduction des nombres relatifs à toutes ces séries de mesures n'offrirait pas d'intérêt, puisque le résultat est toujours négatif; la différence des moyennes de midi et de minuit n'atteint jamais $\frac{1}{2}$ division du tambour.

Conclusion.

On peut conclure de ces observations que le mouvement de translation de la Terre est sans influence sur la réfraction apparente de la lumière qui provient d'une source terrestre.

Il en résulte aussi que l'expérience d'Arago ne saurait être exacte en toute rigueur, et que l'observation des étoiles fixes doit donner lieu à un changement de réfraction correspondant au déplacement de la Terre, comme on l'a calculé précédemment.

Il faut donc revenir sur le calcul de Fresnel et expliquer la contradiction qui reste encore, puisque ce calcul semble justifier la conclusion d'Arago; j'avoue que j'ai été longtemps embarrassé pour trouver l'interprétation qu'il me paraît nécessaire de donner à la formule de Fresnel. Dans l'expression

$$U + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

qui représente la vitesse de propagation de la lumière dans un milieu pondérable au mouvement, le terme correctif $u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ paraît exact, et quand même on le modifierait encore par un facteur différant de l'unité de l'ordre de l'aberration, cela ne produirait aucun effet appréciable. C'est sur le terme principal U qu'il faut porter son attention : ce terme n'est pas la vitesse avec laquelle se propagerait la lumière dans le milieu en repos. Si l'on arrêtait ainsi le milieu sans toucher à la source de lumière, la distance des ondes incidentes ne serait pas modifiée, mais la période de vibration en un point du milieu, sur la surface réfringente en particulier, serait modifiée.

C'est la période de vibration du milieu réfringent qui me paraît dominer le phénomène. Je crois donc qu'il faut considérer le terme U comme représentant la vitesse avec laquelle se propagerait dans le milieu considéré, à l'état de repos, la lumière provenant d'une source fixe dont la période de vibration serait identique à celle que possède le milieu dans l'expérience qu'on envisage.

Plus simplement encore, le terme U est une fonction, non pas de la période absolue de vibration de la source, ni de la distance des ondes qu'elle émet, mais de la période de vibration d'un point du milieu réfringent.

Je laisse aux mathématiciens le soin de justifier ou de combattre cette interprétation; je montrerai seulement qu'elle suffit pour rendre compte de tous les phénomènes.

On voit, en effet, que l'explication de Fresnel ne s'applique pas à l'expérience d'Arago, mais à la nôtre. Quand le prisme et la source sont animés du même mouvement, la période de vibration sur les deux corps est la même, dans quelque direction que se fasse la propagation; le terme U est donc le même dans tous les cas. Il y aurait peut-être lieu de voir ensuite si l'indice de réfraction n, qui entre dans le second terme $u\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, doit correspondre à la période apparente de vibration ou à la longueur d'onde absolue; mais cela n'a aucune importance pratique, il n'y a pas à s'en préoccuper.

La démonstration de Fresnel reste donc intacte; seulement elle s'applique aux expériences faites avec des sources de lumière artificielles, et non pas aux observations d'Arago.

Pour que cette conclusion fût à l'abri de toute critique, il faudrait maintenant reprendre l'expérience d'Arago et mettre en évidence le changement de réfraction qu'elle comporte. Les circonstances ne m'ont pas permis encore de faire cette tentative, qui présente les plus grandes difficultés. Un changement de réfraction qui correspond au dixième de la distance des deux raies D est déjà presque à la limite de la précision qu'on peut atteindre par l'emploi des procédés spectroscopiques ordinaires avec les sources de lumière terrestres : la nécessité d'employer la lumière d'une étoile est loin de simplifier le problème.

XI. — *Anneaux de réflexion.*

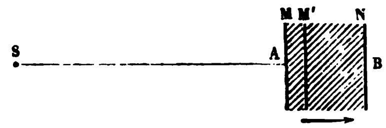
Pour épuiser toutes les ressources que peut offrir l'emploi des lumières artificielles, j'ai voulu essayer encore d'autres phénomènes d'optique, malgré la prévision presque certaine d'un insuccès; ce sont les interférences correspondant aux anneaux de réflexion et de transmission de Newton et aux anneaux des lames mixtes de Young.

Considérons une source terrestre S (*fig.* 16) de période T (qui donnerait à l'état de repos des ondes dont la distance serait $\lambda = VT$) et supposons-la assez éloignée pour qu'elle envoie sur une plaque réfringente MN un faisceau de rayons sensiblement parallèles.

Admettons d'abord que la Terre marche dans le sens des rayons incidents.

Une onde tombant sur la face d'entrée AM donne une onde réfléchie et une onde réfractée. Celle-ci traverse la plaque, va se réfléchir

Fig. 16.



en partie sur la deuxième surface BN, revient ensuite à la première qu'elle traverse; puis, selon le retard qu'elle a subi, elle interfère plus ou moins complétement avec celle qui a éprouvé la première réflexion. Il faut évaluer ce retard.

Quand l'onde va de A en B, sa vitesse de propagation est

$$U' = U + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

La vitesse de cette onde relative au milieu réfringent est

$$U' - u, \quad \text{c'est-à-dire} \quad U - \frac{u}{n^2}.$$

De même, au retour, la vitesse absolue de propagation des ondes est

$$U'' = U - u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

et la vitesse relative au milieu

$$U + \frac{u}{n^2}.$$

Si l'on appelle e l'épaisseur de cette lame, le temps θ que mettra la lumière à la traverser deux fois est donc

$$\theta = \frac{e}{U - \frac{u}{n^2}} + \frac{e}{U + \frac{u}{n^2}} = \frac{2eU}{U^2 - \frac{u^2}{n^2}}.$$

Comme on peut négliger le rapport $\left(\frac{u}{U}\right)^2$, il reste simplement

$$\theta = \frac{2e}{U} = \frac{2ne}{V},$$

l'indice de réfraction n et la vitesse U correspondant, comme nous l'avons dit, à la période de vibration T du milieu, laquelle est la même que celle de la source.

Lorsque l'onde réfléchie est revenue à la surface d'entrée, celle-ci n'est plus en M, mais en M'; elle a parcouru un espace

$$MM' = u\theta.$$

L'onde dont il s'agit mettra encore le temps $\frac{u\theta}{V} = a\theta$ pour revenir au point A où la première onde s'était réfléchie. Le retard de ces deux ondes est donc

$$\theta + a\theta = \theta(1+a) = \frac{2ne}{V}(1+a).$$

Les rayons réfléchis cheminent en sens contraire du mouvement de la Terre; la longueur d'onde, comme nous l'avons dit, est

$$\lambda' = \lambda(1+a).$$

L'interférence des deux ondes produira une frange d'ordre m donné par l'équation

$$m\lambda' = V\theta(1+a) \quad (^1),$$

ou

$$m\lambda = V\theta = 2ne.$$

C'est exactement la même équation que si la source et la lame réfléchissante eussent été immobiles.

On peut répéter le même raisonnement en supposant que la lumière incidente marche en sens contraire du mouvement de la Terre, et l'on arrivera évidemment au même résultat.

Ainsi l'ordre des franges d'interférence et par conséquent les points où on les observe dans les expériences d'anneaux de réflexion sont absolument indépendants du mouvement de la Terre.

Ces calculs me paraissent s'appliquer à l'expérience de M. Babinet ([2]), bien que les détails de cette expérience n'aient pas été rapportés d'une

---

([1]) Je ne tiens pas ici compte de la perte d'une demi-longueur d'onde qui peut résulter de la différence de nature des deux réflexions.

([2]) *Voir* première Partie, p. 161.

manière assez explicite pour qu'il soit possible de la discuter avec précision.

Comme la position des franges ne dépend que de la période de vibration de la lame réfringente, on voit qu'avec une source mobile et une lame fixe, ou bien avec une source fixe et une lame mobile, on pourrait observer un déplacement des franges; mais l'expérience ne paraît pas facile à réaliser.

On peut même aller plus loin et montrer, sans qu'il soit nécessaire de recourir à la formule de Fresnel, qu'avec une source terrestre il ne peut pas y avoir de déplacement des franges. Cette remarque fera comprendre pourquoi des calculs basés sur un point de départ inexact peuvent aussi conduire à un résultat nul.

En effet, quand la lumière chemine comme nous l'avons supposé, l'onde qui pénètre dans la lame met à la traverser deux fois un temps θ qu'il n'est pas nécessaire de préciser et, pour revenir au point A, elle mettra encore un temps $a\theta$. Le retard des deux ondes est donc

$$\theta(1+a),$$

et l'ordre m de la frange obtenue est donné par l'équation

$$m\lambda(1+a) = V\theta(1+a) \quad \text{ou} \quad m\lambda = V\theta.$$

Si la lumière chemine en sens contraire, l'onde qui traverse la lame deux fois met encore le temps θ, puisque rien ne distingue ce phénomène du premier; seulement, le retard absolu des deux ondes interférentes sera

$$\theta - a\theta = \theta(1-a).$$

Comme la longueur d'onde des rayons réfléchis est $\lambda(1-a)$, l'ordre m' de la frange obtenue sera encore donné par l'équation

$$m'\lambda(1-a) = V\theta(1-a),$$

ou bien

$$m'\lambda = V\theta, \quad m' = m.$$

Bien que le calcul ne fît rien prévoir, j'ai cru néanmoins devoir essayer l'expérience, parce qu'elle est susceptible d'une extrême précision. On peut, comme l'a montré M. Fizeau, obtenir des anneaux de réflexion correspondant à une différence de marche de plus

de 50 000 longueurs d'onde, et si le phénomène éprouvait une altération d'un cent-millième de sa valeur, il serait facile de s'en apercevoir.

Je n'ai pas à indiquer ici les méthodes qu'emploie M. Fizeau (¹) pour observer les anneaux d'interférence qui correspondent à des différences de marche considérables. Je rappellerai seulement que, à l'aide d'un petit prisme à réflexion totale placé très-près du foyer principal d'une lentille, on fait réfléchir sur cette lentille un faisceau divergent de rayons qui proviennent d'une flamme d'alcool salé. Ces rayons sont rendus parallèles par la lentille; ils tombent ensuite sur la lame réfringente, s'y réfléchissent sur les deux faces, retournent à la lentille et vont converger ensuite en un point très-voisin du prisme. En plaçant l'œil en ce point, la surface de la lame est totalement illuminée, et si les faces sont sensiblement parallèles, on y voit une série de franges plus ou moins régulières, alternativement obscures et brillantes, dont chacune passe par tous les points où l'épaisseur est la même.

Cette méthode présente quelques difficultés qui tiennent à la nature de la source d'une part, et d'autre part au procédé d'observation.

Il arrive souvent, quand on emploie la lumière d'une flamme d'alcool salé, que des lames d'ailleurs parfaitement travaillées donnent lieu à des franges très-confuses, difficiles à distinguer et quelquefois complétement invisibles. Cela tient, comme l'a montré M. Fizeau, à ce que la lumière jaune de la soude renferme, en réalité, deux sortes de vibrations dont les longueurs d'onde ne diffèrent que de 1 millième environ. Chacune de ces sources donne lieu à un système de franges particulier qui peuvent se superposer exactement, ou alterner exactement, ou empiéter d'une manière plus ou moins complète. Dans le premier cas, les franges résultantes seront très-distinctes; dans le deuxième, elles disparaîtront dans un éclairement uniforme; dans le troisième, elles seront plus ou moins confuses. Comme les épaisseurs des lames sur lesquelles on opère s'obtiennent un peu au hasard, on ignore le cas que l'on va rencontrer, et il y a peu de chances pour qu'on tombe sur le plus avantageux.

En second lieu, quand l'épaisseur de la lame réfringente est assez grande pour donner une différence de marche considérable, le moindre

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LXVI, p. 429.

changement d'inclinaison produit une altération sensible de la différence de marche et fait déplacer les franges. Ces franges, en effet, vues à l'œil nu, paraissent très-mobiles, et il serait difficile d'apprécier avec sécurité un déplacement très-faible dû à une cause analogue au mouvement de la Terre. L'emploi d'une lunette ne fait pas disparaître cet inconvénient en totalité, parce que les franges ne se produisent pas sur un point de l'espace bien défini ; elles ne sont ni sur la première ni sur la deuxième surface de la lame, et la mise au point laisse quelque incertitude.

Choix de la source de lumière. — J'ai cherché d'abord à améliorer la source.

La flamme rouge que l'on obtient avec les sels de *lithine* n'est pas assez homogène quand elle a beaucoup d'éclat, ni assez éclatante quand elle est homogène; les sels de lithine s'évaporent très-vite, de sorte que cette lumière n'est pas commode à produire d'une manière continue.

Une étincelle entre deux fils de thallium donne une lumière très-homogène à condition que l'étincelle soit très-faible. Comme la source de lumière est alors réduite à un point, le réglage de l'expérience est un peu plus délicat; mais après quelques essais on y parvient assez rapidement. Avec cette source de lumière et une lame de verre de $14^{mm},5$ d'épaisseur, j'ai obtenu de très-belles franges par le procédé optique qui sera décrit plus loin. Ces franges correspondaient à une différence de marche de 80 000 longueurs d'onde du thallium. L'emploi du phosphate de thallium, dans un brûleur à gaz, m'a donné d'aussi bons résultats et d'une manière plus commode, parce que la source avait alors de plus grandes dimensions. Mais, dans les deux cas, par l'étincelle ou par la lampe à gaz, on ne peut obtenir de belles franges que si la lumière est très-faible. Pour peu qu'on augmente l'éclat, soit en mettant plus de phosphate, soit en rendant l'étincelle plus brillante, les franges disparaissent.

J'ai essayé alors si l'on ne réussirait pas mieux avec la lumière de la soude, dont la production est plus facile, en éliminant l'une des deux longueurs d'onde qui se produisent simultanément.

On peut d'abord avec un spectroscope ordinaire produire les deux

raies brillantes de la soude, éliminer l'une d'elles par un écran et utiliser l'autre.

Dans cette expérience, et dans toutes celles où l'on utiliserait les phénomènes d'interférence ordinaire, la nécessité d'employer une fente étroite fait perdre beaucoup de lumière; on obtient un résultat plus satisfaisant en profitant de la double réfraction pour éteindre l'une des sources. Voici la disposition de l'expérience :

Une flamme jaune est placée au foyer principal d'une lentille qui rend les rayons parallèles. Le faisceau lumineux traverse ensuite un prisme de Nicol qui les polarise, puis une lame de quartz parallèle à l'axe et dont la section principale fait un angle de 45 degrés avec le plan primitif de polarisation, et enfin un deuxième Nicol dont la section principale est parallèle ou perpendiculaire à celle du premier et pour éteindre ceux des rayons qui au sortir du quartz sont polarisés dans un certain plan. En choisissant convenablement l'épaisseur de la lame cristalline, on pourra faire en sorte que les rayons des deux longueurs d'onde qui existent dans la lumière jaune soient, à la sortie du quartz, polarisés dans deux plans rectangulaires et éteindre l'un des systèmes par l'analyseur. Le calcul de cette épaisseur est très-simple.

Désignons par n_o et n_e les indices de réfraction ordinaire et extraordinaire du quartz pour la longueur d'onde la plus grande λ; n'_o et n'_e les indices relatifs à la longueur d'onde λ'; E l'épaisseur de la lame, et supposons que la différence de marche soit $2m\frac{\lambda}{2}$ pour le premier et $(2m+1)\frac{\lambda'}{2}$ pour le second; on aura

$$2m\frac{\lambda}{2} = (n_e - n_o)\,\mathrm{E},$$

$$(2m+1)\frac{\lambda'}{2} = (n'_e - n'_o)\,\mathrm{E}.$$

On en déduit

$$\frac{2m+1}{2m} = \frac{\lambda}{\lambda'}\,\frac{n'_e - n'_o}{n_e - n_o},$$

ou sensiblement

$$\frac{2m+1}{2m} = \frac{\lambda}{\lambda'}, \quad \frac{1}{2m} = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} = \frac{1}{983}.$$

L'épaisseur qui convient est alors

$$E = \frac{983}{2} \frac{\lambda}{n_e - n_o}.$$

On trouve pour le quartz

$$E = 31^{mm},60.$$

Un calcul analogue pour le spath d'Islande donnerait

$$E = 1^{mm},682.$$

Avec une lame de cette épaisseur les rayons de longueur d'onde λ resteront, à la sortie du cristal, polarisés dans le plan primitif; le plan de polarisation des autres aura tourné de 90 degrés. Il suffira donc de croiser les deux Nicols pour faire disparaître en totalité ces derniers.

En réalité, on n'obtient pas rigoureusement l'épaisseur qui convient, mais cela n'est pas nécessaire. On remplace la lumière jaune par une lumière blanche sur laquelle on maintient les deux raies D, et l'on examine la lumière émergente avec un spectroscope. Le spectre est alors sillonné de bandes d'extinction; on fait tourner un peu la lame cristalline pour augmenter ou diminuer la différence de marche, et l'on amène une des bandes noires sur l'une des deux raies D. L'appareil est alors réglé, et en l'éclairant avec la lumière de la soude il ne laissera passer que des rayons d'une seule longueur d'onde.

Pour que l'expérience réussisse bien, il faut que la différence de marche soit sensiblement la même en tous les points de la lame cristalline. L'emploi du spath d'Islande ne convient pas, parce que l'épaisseur est trop faible et que les moindres défauts des surfaces ont une influence notable; on n'arrive pas alors à éteindre complétement l'une des deux raies brillantes. Le quartz, au contraire, donne des résultats excellents.

La perte de lumière est assez faible. En effet, le premier Nicol enlève la moitié de la lumière incidente et le second la moitié du reste. L'éclat de la lumière émergente est donc le quart de celui de la source et la moitié de celui qui correspond à la longueur d'onde utilisée.

Avec cette disposition, on obtient des franges sur toutes les lames, d'épaisseur inférieure à 10 millimètres, qui n'en donnaient pas précédemment avec la lumière de la soude seule, à cause de l'empiétement

plus ou moins complet des deux systèmes simultanés, et les franges obscures sont parfaitement noires.

En produisant les franges à l'aide d'une lame d'air dont on fera l'épaisseur d'une manière continue, on ne doit pas observer ces alternatives de disparition et de réapparition de franges qui ont été signalées par M. Fizeau. En effet, j'ai réalisé l'expérience avec deux lames de verre dont l'une était fixe et l'autre portée par le chariot d'une machine à diviser. En faisant marcher la lame mobile de manière à augmenter progressivement l'épaisseur de la lame d'air, le champ restait couvert sans interruption de franges qui couraient toujours dans le même sens jusqu'à ce que l'intervalle des lames fût d'environ 15 millimètres, ce qui correspond à une différence de marche de 50 000 longueurs d'onde. Les franges sont alors moins nettes, plus agitées, ce qui peut tenir en partie aux défauts d'homogénéité des différents points de la couche d'air. Je n'ai pas réussi d'ailleurs à pousser l'expérience plus loin.

J'ai été surpris de constater que l'emploi de l'appareil à extinction de l'une des raies D ne permet guère d'observer plus facilement les franges qui correspondent à une différence de marche considérable, celles que donnent des lames de verre de 12 à 15 millimètres d'épaisseur, par exemple. Ce qui explique cette circonstance, c'est que pour la flamme de la soude rendue homogène, comme pour la lumière du thallium, les franges s'évanouissent aussitôt qu'on augmente l'éclat de la source.

Les causes principales qui limitent le nombre des franges que l'on peut observer sont donc les suivantes :

1° En un point déterminé de la source il se produit des changements physiques qui altèrent de temps en temps la phase de vibration, de sorte que les rayons interférents n'ont plus la même origine. Cette cause d'altération agit beaucoup moins vite que ne le pensait Fresnel, et rien n'indique qu'elle ait de l'influence dans les phénomènes que nous pouvons observer.

2° Les milieux dans lesquels se produit la différence de marche ne sont jamais absolument homogènes.

3° Une source de lumière homogène n'émet, quand elle a peu d'intensité, que des rayons d'une longueur d'onde bien définie; mais, à

mesure que l'éclat augmente pour une cause quelconque, elle émet en même temps des rayons dont les longueurs d'onde sont voisines en plus et en moins. Ces vibrations nouvelles donnent des systèmes de franges un peu différents qui finissent par envahir le champ et produire un éclairement uniforme. On s'en assure, du reste, en observant une telle source avec un spectroscope; on aperçoit d'abord une raie très-fine, comme la fente, et, à mesure qu'on augmente l'intensité de la source, cette raie devient baveuse en s'élargissant des deux côtés; les instruments d'acoustique présenteraient d'ailleurs des propriétés tout à fait analogues. Cette dernière cause est celle qui paraît avoir la plus grande influence.

Mode d'observation des franges. — Je n'ai pas tiré grand profit, comme on le voit, des modifications apportées à la source de lumière; mais je crois avoir été plus heureux pour le mode d'observation, en produisant les franges dans un plan bien défini, au lieu d'examiner celles qui se forment dans l'intérieur de la lame elle-même, en des points qu'il est difficile de préciser.

Supposons d'abord que les faces de la lame soient rigoureusement planes et parallèles; éclairons-la par une source assez large pour donner des rayons de toutes les directions, et considérons à part chacun des faisceaux de rayons parallèles.

Le faisceau normal à la lame se réfléchit normalement, et les deux systèmes de rayons qui le constituent ont une différence de marche exprimée par la formule

$$\Delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}.$$

En recevant ce faisceau sur une lentille convergente, on obtiendra au foyer principal un certain phénomène, une interférence complète par exemple.

Un faisceau qui fait avec la normale à la lame un angle i correspondant à un angle de réfraction r éprouve une différence de marche

$$\Delta' = 2ne\cos r + \frac{\lambda}{2}.$$

Ces rayons, une fois réfléchis sur la lame puis réfractés dans la len-

tille convergente, iront former dans le plan focal principal un autre phénomène, par exemple un maximum de lumière.

En menant par le centre optique de la lentille une série de droites faisant le même angle i avec la normale à la lame réfléchissante, on formera un cône dont les génératrices seront parallèles aux différents faisceaux qui se réfléchissent sous le même angle et ont la même différence de marche. Ce cône déterminera sur le plan focal un cercle dont tous les points seront également éclairés. Il se produira donc dans le plan focal principal de la lentille une série d'anneaux circulaires, alternativement brillants et obscurs, absolument fixes et indépendants de la position de l'œil; les pointés comporteront alors plus de rigueur. Si l'on se borne aux rayons peu écartés de la normale, on pourra représenter la loi des premiers anneaux par la formule suivante :

$$\rho^2 = f^2 (m_0 - m) \frac{n}{2} \frac{\lambda}{e} \quad (^1),$$

dans laquelle ρ est le rayon d'un anneau, f la longueur focale de la lentille, m_0 l'ordre de la frange centrale et m l'ordre de l'anneau considéré.

On peut observer ces anneaux à l'œil nu, en plaçant la flamme entre l'œil et la lame, comme l'a remarqué d'abord Haidinger avec une lame de mica, ou mieux en faisant réfléchir la lumière incidente sur la lame à l'aide d'une lame transparente. Cette dernière disposition permet de voir aisément le centre des anneaux, lequel est situé sur la normale et ne pourrait se voir qu'à travers la flamme elle-même dans la disposition précédente.

Dans les deux cas, il faut accommoder l'œil pour voir à l'infini, et l'on aperçoit de beaux anneaux circulaires. Pour fixer la position de ces anneaux, il suffit de remplacer l'œil par une lunette astronomique à réticule. Les anneaux se dessinent alors au foyer principal de l'instrument, et on les pointe avec toute l'exactitude désirable à l'aide d'un réticule.

Nous avons supposé que les deux faces de la lame étaient rigoureusement planes. Lorsque cette condition ne sera pas suffisamment remplie, le faisceau réfléchi parallèlement à une direction déterminée

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXIII, p. 128.

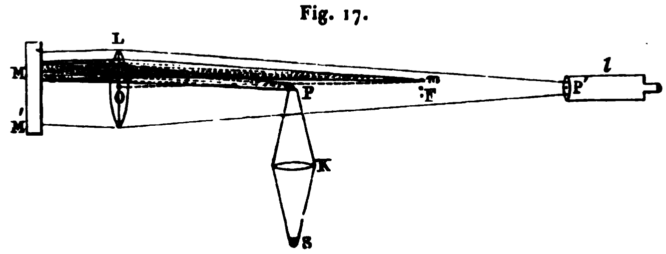
et provenant des différents points de la surface ne sera pas formé de systèmes de rayons ayant tous la même différence de marche; l'intensité ne sera jamais nulle au point de concours dans le plan focal et les interférences régulières disparaîtront. Comme il n'y a pas lieu d'espérer de lames parfaites, on élude la difficulté en posant entre la lame et la lentille qui forme l'objectif de la lunette un diaphragme de grandeur convenable. Le diaphragme remplit le même rôle que ceux que l'on emploie dans certains objectifs de photographie.

Le phénomène produit en un point m du plan focal de l'objectif L (*fig.* 17) provient des rayons qui se sont réfléchis sur une portion M de la lame ayant la même étendue que l'ouverture du diaphragme. Si la lame M est assez bien travaillée pour que les systèmes de rayons qui constituent ce faisceau aient sensiblement la même différence de marche, on obtiendra en m une interférence régulière. Si cette condition n'est pas remplie, on réduira davantage l'ouverture du diaphragme, jusqu'à ce que les franges soient bien nettes. Ces franges ne sont plus circulaires, bien entendu : ce sont les anneaux déformés en chaque point m d'une quantité proportionnelle à la variation d'épaisseur de la lame au point correspondant M. L'étude de la lame pourrait donc être faite par la mesure de ces déformations.

J'ai employé de préférence une autre disposition équivalente en théorie, mais qui a l'avantage de ménager toute la lumière incidente.

Les rayons lumineux partis de la source S tombent sur une lentille

Fig. 17.



K qui forme au point P une image de la source. En ce point est un prisme à réflexion totale situé entre la lentille convergente L et son foyer principal F. Les rayons réfléchis par ce prisme tombent sur la lentille L, puis sur la lame MM', reviennent à la lentille et vont conver-

ger en P′ au delà du foyer principal. Là se trouve l'objectif d'une petite lunette à réticule *l*, qui vise au plan focal principal F. On distingue ainsi à l'aide de cette lunette les franges qui se produisent dans le plan focal principal.

On voit aisément que le prisme réflecteur P, qui est en réalité beaucoup plus petit que ne l'indique la figure, fait fonction de diaphragme. En effet, les rayons qui reviennent de la lame MM′ dans la direction O*m* proviennent de rayons incidents qui sont partis du prisme P dans une direction telle que PI, et qui ne couvrent sur la lame MM′ qu'une étendue à peu près égale à celle du prisme lui-même. Ces rayons, ne provenant ainsi que d'une région très-petite M, produiront au point *m*, dans le plan focal, un phénomène régulier d'interférence correspondant à l'épaisseur de la lame au point M et à l'inclinaison du faisceau. On améliore encore le phénomène en diaphragmant un peu l'objectif de la lunette d'observation en P′; c'est comme si l'on réduisait les dimensions du prisme à réflexion.

Par ce moyen, on obtient de très-belles franges bien nettes et absolument fixes avec toutes les lames épaisses qui ne donnaient, par les procédés ordinaires, que des franges vagues et agitées.

Le mode d'observation étant bien déterminé, j'ai essayé si le mouvement de la Terre aurait une influence appréciable. Un appareil analogue à celui que je viens de décrire était installé sur la table mobile autour d'un axe vertical, et, après avoir pointé une frange, on dirigeait l'appareil de façon que la lumière incidente marchât alternativement dans le sens ou en sens contraire du mouvement de la Terre. Le résultat a été constamment négatif, comme on s'y attendait.

Voici, par exemple, une observation faite le 24 décembre 1871, à 11^h30^m du matin.

La lame était en flint et avait 10 millimètres d'épaisseur, ce qui donnait une différence de marche de plus de 50 000 longueurs d'onde. On a examiné avec attention la position des franges par rapport au réticule de la lunette, en dirigeant alternativement l'appareil vers l'est et vers l'ouest, et l'on a pu s'assurer que, s'il y avait un déplacement, il était certainement inférieur au dixième de la distance de deux franges brillantes, c'est-à-dire qu'il n'était pas la cinq cent millième partie de la différence totale.

XI. — *Anneaux de transmission.*

Les anneaux de transmission sont moins faciles à observer parce qu'ils se produisent sur un fond éclairé, les minima n'étant que de petits affaiblissements de lumière par rapport à l'éclairement général.

D'ailleurs, puisque le phénomène est exactement complémentaire de celui des anneaux de réflexion, et que ces derniers ne sont pas influencés par le mouvement de la Terre, il est certain que la position des anneaux de transmission ne sera pas non plus modifiée.

Sans répéter les calculs, il est facile de voir qu'en théorie les phénomènes sont identiques.

En effet, pour produire les anneaux de réflexion, les deux ondes entre lesquelles s'établit une différence de marche se séparent sur la première face de la lame. L'une des ondes se réfléchit immédiatement; l'autre traverse la lame deux fois pendant que cette lame se déplace en vertu du mouvement de la Terre, dans le sens des rayons incidents par exemple.

Au contraire, si l'on observe les anneaux de transmission, on n'a qu'à supposer la source de l'autre côté. La lumière incidente traverse d'abord la lame jusqu'à la face de sortie. Ici l'onde se partage en deux dont l'une suit son chemin, l'autre retourne à la face d'entrée pour s'y réfléchir encore. Ces deux derniers passages à travers la lame sont absolument identiques à ceux que nous avons considérés dans le cas des anneaux de réflexion et la différence de marche géométrique sera exactement la même.

Je n'ai d'ailleurs fait aucune expérience à grande différence de marche avec les anneaux de transmission, parce que l'observation en serait très-difficile.

XII. — *Anneaux des lames mixtes.*

On peut appeler *anneaux de réfraction* (¹) ou anneaux des *lames mixtes* (pour rappeler une ancienne observation d'Young) les phéno-

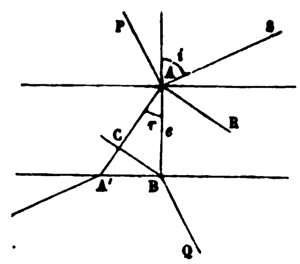
---

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. XXIII, p. 118.

mènes que l'on obtient par l'interférence de deux faisceaux de lumière qui ont parcouru le même chemin géométrique, l'un dans l'air, l'autre dans un milieu réfringent, ou bien encore qui ont traversé deux milieux différents d'épaisseurs égales et inégalement réfringents.

Pour calculer ces phénomènes, évaluons d'abord le temps que mettra une onde incidente AP (*fig.* 18) pour aller du point A de la face d'en-

Fig. 18.



trée au point B de la face de sortie, situé sur la même normale. Ce temps est celui que mettra l'onde réfractée AR pour aller aussi du point A au point B, ou bien celui que met le rayon réfracté AA′ pour aller du point A au point C. Ce temps est

$$\theta = \frac{AC}{U} = \frac{e\cos r}{U} = \frac{ne\cos r}{V},$$

les lettres ayant les mêmes significations que précédemment.

Le chemin que la lumière aurait parcouru dans le vide pendant le même temps θ est

$$V\theta = ne\cos r.$$

Le chemin équivalant au temps nécessaire pour traverser de la même manière et sous la même incidence un autre milieu d'égale épaisseur et d'indice de réfraction n' sera de même

$$n'e\cos r',$$

de sorte que la différence de marche de deux rayons qui auront traversé deux milieux différents dans ces conditions sera

$$\Delta_1 = e\,(n\cos r - n'\cos r').$$

En particulier, si l'un des milieux est simplement le vide ou l'air, il suffira de remplacer n' par 1, l'angle r' deviendra égal à i, et la différence de marche sera

$$\Delta_2 = e\,(n \cos r - \cos i).$$

Enfin, si les lames sont normales au faisceau incident, ces différences de marche deviennent

$$\Delta_1 = e\,(n - n'),$$
$$\Delta_2 = e\,(n - 1).$$

Pour faire interférer deux pareils faisceaux de lumière, on peut employer plusieurs moyens; j'en vais indiquer quelques-uns.

Avec une source de lumière homogène, on peut prendre un collimateur à fente et une lunette astronomique, entre lesquels on place une lame réfringente de manière à intercepter l'une des moitiés du faisceau de rayons parallèles qui vont du collimateur à la lunette.

On obtient ainsi au foyer principal de la lunette un système de franges qui provient de l'interférence des deux moitiés du faisceau lumineux. Ces franges correspondent au phénomène de diffraction produit par une fente étroite; elles sont d'autant plus larges que le faisceau de lumière utilisée est plus étroit.

Si la source de lumière n'est pas homogène, les différents points du plan focal de la lunette sont en même temps le siége de franges obscures ou brillantes, provenant de différents faisceaux homogènes émis par la source, et, si la lame M n'est pas très-mince, on observe un éclairement homogène. Pour distinguer les franges, il suffit d'employer la méthode générale de MM. Fizeau et Foucault et d'analyser par un spectroscope à fente le phénomène qui se produit en chaque point du champ : on obtient alors un spectre cannelé.

On peut simplifier l'appareil en utilisant le phénomène des *bandes de Talbot* [1]. Il suffit pour cela de placer la lame réfringente sur l'une des moitiés du faisceau lumineux dans un spectroscope ordinaire, en ayant soin toutefois que la portion du faisceau sur laquelle on établit ainsi un retard soit celle qui traverse les prismes réfringents dans le voisinage de l'arête, c'est-à-dire du côté opposé à celui vers lequel s'ef-

---

[1] Voir *Journal de Physique*, t. I, p. 182.

fectue la dispersion. On obtient ainsi dans le spectre les mêmes cannelures que précédemment, mais avec plus de lumière, parce qu'on n'a besoin alors que d'une fente.

Quel que soit le moyen employé pour produire des bandes dans le spectre, on ne peut pas atteindre ainsi une différence de marche assez grande pour la question qui nous occupe. En effet, il serait difficile d'apercevoir dans un spectre 5000 bandes d'interférence, et même si l'on y parvenait la différence de marche serait alors d'environ 5000 longueurs d'onde pour le rouge extrême et 10 000 longueurs d'onde pour l'extrême violet. Avec un réseau de franges aussi serrées il ne serait pas possible d'apercevoir un petit déplacement.

Le moyen qui réussit le mieux pour obtenir les anneaux des lames mixtes, avec de grandes différences de marche, est le réfractomètre interférentiel de M. Jamin.

Lorsque les lames de cet appareil sont exactement parallèles (1) et qu'on reçoit la lumière émergente sur une lunette, on obtient, au foyer principal de cette lunette, des franges d'autant plus larges que les verres sont plus homogènes. En interposant alors une lame réfringente sur le trajet de l'un des deux faisceaux interférents, on obtient au foyer principal de la lunette d'observation, si la source de lumière est homogène, une série d'anneaux circulaires. Le centre de ces anneaux correspond aux rayons qui ont traversé normalement la lame réfringente; chacun des anneaux circulaires est dû aux différents systèmes de rayons parallèles qui ont traversé cette lame sous une même incidence.

Les rayons des premiers anneaux sont représentés par la formule

$$\rho^2 = f^2 (m - m_0) \frac{n}{n-1} \frac{\lambda}{e} \quad (2),$$

lorsque la différence de marche est due à ce que l'un des rayons seulement a traversé un milieu réfringent.

Si les deux moitiés du faisceau avaient traversé deux milieux diffé-

(1) *Voir*, pour la théorie de l'appareil de M. Jamin, *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXIII, p. 141.

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXIII, p. 120.

rents, les rayons des premiers anneaux seraient donnés par l'équation

$$\rho^2 = f^2 (m - m_0) \frac{nn'}{n - n'} \frac{\lambda}{e}.$$

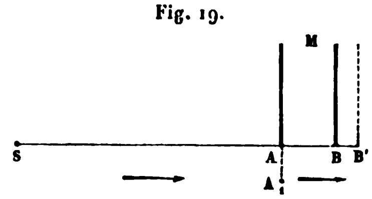
Le seul point sur lequel il y ait lieu d'insister est que les diamètres des anneaux sont d'autant plus grands que la longueur focale de la lunette est elle-même plus grande.

On peut remarquer encore que, la lame réfringente n'intervenant ici que par l'excès de l'indice de réfraction sur l'unité, le travail des surfaces n'a pas besoin d'être aussi parfait que lorsqu'il s'agit de produire des anneaux de réflexion ou de transmission; on verra, en effet, qu'il a été possible d'obtenir des anneaux réguliers avec des épaisseurs de verre de près de 30 millimètres.

Pour déterminer l'influence que peut avoir le mouvement de la Terre sur le phénomène, il suffit évidemment d'examiner si la frange centrale qui correspond aux rayons normaux peut être modifiée.

Supposons que l'on emploie une source mobile avec l'observateur, puisque c'est le seul cas pratique, et admettons que le mouvement de la Terre soit parallèle aux rayons incidents SA qui tombent sur la lame M (*fig.* 19).

Fig. 19.



La vitesse des ondes relative à la lame est, comme nous l'avons vu plus haut,

$$U - \frac{u}{n^2},$$

de sorte que le temps θ nécessaire pour qu'une onde traverse la lame est

$$\theta = \frac{e}{U - \frac{u}{n^2}} = \frac{e}{U\left(1 - \frac{u}{n^2 U}\right)}.$$

En négligeant des quantités de l'ordre du carré de l'aberration, on obtient

$$\theta = \frac{e}{U}\left(1+\frac{u}{n^2 U}\right) = \frac{ne}{V}\left(1+\frac{u}{nV}\right) = \frac{e}{V}(n+a).$$

Pendant ce temps θ, la deuxième face B de la lame est venue en B' et a parcouru un espace $BB' = u\theta$. L'onde considérée est en ce point B' et le chemin AB' qu'elle a parcouru est égal à

$$e + u\theta = e(1+an),$$

en faisant abstraction de termes négligeables.

Le chemin parcouru pendant le même temps θ, par le rayon qui a marché dans l'air, est

$$V\theta = e(n+a).$$

La différence de marche Δ est donc

$$\Delta = e(n+a) - e(1+an) = e(n-1)(1-a).$$

Comme la longueur d'onde de la lumière, en vertu du mouvement de translation, est devenue $\lambda(1-a)$, l'ordre m de la frange obtenue sera donné par l'équation

$$e(n-1)(1-a) = m\lambda(1-a),$$

ou bien

$$e(n-1) = m\lambda.$$

C'est exactement l'équation qu'on aurait obtenue si l'on avait supposé la source et l'observateur immobiles.

On arrivera évidemment au même résultat en supposant dans le calcul que les rayons incidents se propagent en sens contraire du déplacement de la lame.

Il en résulte donc que ce nouveau genre de phénomènes doit aussi conduire à un système de franges absolument indépendant du mouvement de la Terre.

On voit aussi que le déplacement des franges ne serait pas nul si l'on pouvait opérer avec une source fixe: ce déplacement correspondrait alors au changement de période apparente de vibration.

De même encore on serait conduit à un déplacement de franges si le

terme U qui entre dans la formule n'était pas indépendant du mouvement de la Terre, c'est-à-dire si l'on n'acceptait pas l'interprétation que nous avons donnée de la formule de Fresnel. Les deux expériences qui suivent donneront une idée de la précision que l'on peut atteindre.

Première expérience. — 24 mars 1870; $10^h 30^m$ du soir.

On s'est servi d'une lame de flint léger de $10^{mm},2$ d'épaisseur. Les franges sont très-belles, et l'on juge qu'il n'y a pas un déplacement d'un dixième de la distance de deux franges brillantes, lorsque l'appareil est dirigé alternativement vers l'est et vers l'ouest. La différence de marche étant d'environ 10000 longueurs d'onde, le déplacement, s'il existe, n'est donc pas la cent-millième partie de la différence de marche.

Deuxième expérience. — 29 mars 1870; $11^h 45^m$ du soir.

L'expérience a été recommencée avec une lame de crown de 28 millimètres d'épaisseur environ. Il n'y avait pas un déplacement d'un huitième de frange quand l'appareil était alternativement dirigé vers l'est ou vers l'ouest. La différence de marche des deux faisceaux étant d'environ 24000 longueurs d'onde, il n'y avait donc pas un déplacement correspondant à la cent quatre-vingt-douze-millième ou la deux cent-millième partie de la différence de marche.

Comme on le voit, c'est une quantité vingt fois plus faible que l'aberration.

XIII. — *Expérience de M. Hoek.*

M. Hoek [1] a publié récemment des expériences intéressantes par lesquelles il s'est proposé en particulier de déterminer le degré d'exactitude de la formule de Fresnel.

Le principe de ses expériences est le suivant :

Deux faisceaux lumineux A et B marchent parallèlement et l'un d'eux A traverse un milieu réfringent M. Ces faisceaux se réfractent

(1) *Archives néerlandaises*, t. III, p. 180 (1868), et t. IV, p. 443 (1869).

sur une lentille convergente, vont au foyer principal se réfléchir sur un miroir et reviennent ensuite en échangeant leurs chemins; au retour le faisceau A′, issu du premier faisceau A, passe dans l'air, tandis que le second B′, issu de B, traverse le milieu réfringent.

Si l'appareil est entièrement immobile, il est clair que les retards éprouvés par les deux faisceaux seront identiques à l'aller et au retour et que la différence de marche finale sera nulle.

Mais si le milieu réfringent est en mouvement, dans le sens, par exemple, des rayons incidents, le retard imprimé par ce milieu aux faisceaux qui le traversent pourra n'être pas le même, et l'un d'eux pourra acquérir une certaine avance. Au contraire, en changeant le sens du mouvement du milieu, l'avance se portera sur l'autre faisceau, et l'on pourra observer un certain déplacement ou une production de franges.

L'expérience ayant été négative, M. Hoek en conclut l'exactitude de la formule de Fresnel, mais sans avoir remarqué la différence qui existe entre cette expérience faite avec une source terrestre et l'expérience d'Arago où l'on employait la lumière des étoiles. Le calcul de l'expérience de M. Hoek peut, d'ailleurs, être présenté d'une manière très-simple.

Supposons que le milieu M, terminé par deux faces parallèles, marche avec la Terre dans le sens des rayons incidents; nous avons vu (p. 408) que le temps employé par une onde A à traverser cette lame est

$$\theta = \frac{e}{V}(n + a).$$

Pour parcourir le même chemin relatif dans l'air, une onde du faisceau B emploiera le temps

$$\theta' = \frac{e}{V}(1 + a).$$

Le retard τ de ces deux ondes est donc

$$\tau = \theta - \theta' = \frac{e}{V}(n - 1).$$

On voit que le retard imprimé par le milieu réfringent au faisceau qui l'a traversé est indépendant de l'aberration a et par conséquent du

sens dans lequel a lieu le mouvement de la Terre. Au retour, le retard imprimé à l'autre faisceau sera le même, et si ces deux faisceaux A et B sont partis d'un même point en concordance, ils y reviendront sans différence de marche. Le mouvement de la Terre ne peut donc avoir aucune influence sur les phénomènes observés dans cette expérience.

Ce résultat, comme la plupart de ceux que j'ai indiqués déjà, n'est compatible qu'avec la formule de Fresnel. On peut le montrer aisément.

Supposons que la vitesse de propagation d'une onde dans un milieu qui est entraîné dans le même sens ait pour expression

$$U' = U + u - \alpha u,$$

α étant une quantité que l'on déterminera de manière à satisfaire à l'expérience, et qui dans tous les cas est égale à l'unité lorsque l'indice de réfraction est égal à 1.

La vitesse de l'onde A par rapport au milieu réfringent M sera égale à

$$U' - u, \quad \text{ou bien} \quad U - \alpha u;$$

le temps θ nécessaire pour traverser cette lame sera

$$\theta = \frac{e}{U - \alpha u} = \frac{e}{U}\left(1 + \frac{\alpha u}{U}\right) = \frac{ne}{V}\left(1 + \frac{n\alpha u}{V}\right),$$

ou

$$\theta = \frac{e}{V}(n + n^2 a\alpha).$$

L'autre faisceau B mettra pour parcourir le même chemin dans l'air le temps

$$\theta' = \frac{e}{V}(1 + a).$$

Le retard des deux ondes sera donc

$$\tau = \theta - \theta' = \frac{e}{V}(n - 1) + \frac{e}{V} a (n^2 \alpha - 1).$$

Au retour, c'est le faisceau B' qui sera modifié, et, comme il tra-

verse le milieu M dans un sens opposé au transport de ce milieu, le retard des deux faisceaux sera

$$\tau_1 = \frac{e}{V}(n-1) - \frac{e}{V}a(n^2\alpha - 1).$$

En définitive, le retard résultant sera égal à la différence des deux retards τ et τ_1, c'est-à-dire

$$(1) \qquad \frac{2e}{V}a(n^2\alpha - 1).$$

Si l'expérience indique que ce retard est absolument nul, il faudra en conclure nécessairement

$$n^2\alpha = 1, \quad \alpha = \frac{1}{n^2},$$

ou bien

$$U' = U + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

c'est-à-dire précisément la formule donnée par Fresnel.

M. Hoek considère aussi son expérience comme un moyen de vérifier avec quel degré d'approximation le terme de correction, qui entre dans la formule de Fresnel, représente le changement de vitesse des ondes dû au mouvement du milieu réfringent.

Si la vitesse de ce milieu s'ajoutait simplement à la vitesse de la lumière, on aurait

$$\alpha = 0,$$

ce qui donnerait pour retard entre les deux faisceaux, dans l'expérience de M. Hoek,

$$-\frac{2e}{V}a = -\frac{e}{V}\frac{1}{5000}.$$

Si la vitesse de propagation était indépendante du transport du milieu réfringent, α serait égal à 1; l'expression (1) donnerait alors un retard du sens contraire et égal à

$$\frac{2e}{V}a(n^2 - 1).$$

En prenant 1,5 pour l'indice de réfraction, on obtiendrait

$$\frac{2e}{V}a(2,25-1)=\frac{e}{V}a\,2,50=\frac{e}{V}\frac{1}{4000}.$$

On voit que dans le premier cas le retard de l'un des deux faisceaux serait la cinq-millième partie du temps que mettrait la lumière à parcourir dans l'air un chemin égal à l'épaisseur du milieu interposé, et que dans le second cas il en serait le quatre-millième, mais en sens contraire. Plus simplement la différence de marche serait le cinq-millième ou le quatre-millième de cette épaisseur.

Si cette épaisseur est de 100 millimètres comme dans l'expérience de M. Hoek, la différence de marche serait de 40 ou 50 longueurs d'onde. Comme il est certain, d'après M. Hoek, que le déplacement n'est pas d'une demi-longueur d'onde, il en résulte que la formule de Fresnel se trouve vérifiée à un centième près de sa valeur.

(Les calculs de M. Hoek ne sont pas présentés tout à fait de cette manière; mais, au lieu de discuter ses raisonnements, j'ai préféré leur donner une forme qui me paraît plus rigoureuse, le fond restant d'ailleurs le même.)

J'ai déjà indiqué la disposition [1] de l'une des expériences de M. Hoek.

Dans un autre appareil mieux combiné, la lumière partait d'une fente S placée au foyer principal d'un collimateur L, se réfléchissait en partie sur la première face d'un prisme P, traversait ensuite l'objectif L′ et la fente S′ d'un deuxième collimateur, puis les deux lunettes et le milieu réfringent comme dans la première expérience, et revenait ensuite, par le collimateur S′L′, tomber de nouveau sur le prisme P. La lumière de retour était réfractée dans le prisme, et on l'observait avec une lunette.

Cette deuxième expérience n'a pas mieux réussi que la première; quelque direction que l'on donnât à l'appareil, on n'a jamais aperçu de minima dans le spectre. M. Hoek en conclut l'exactitude de la formule de Fresnel.

En toute rigueur, on pourrait dire que ces expériences ingénieuses

---

[1] Première Partie, p. 162.

de M. Hoek sont *doublement négatives*. Il n'est pas prouvé que, si le phénomène donnait lieu réellement à un retard entre les deux faisceaux, l'appareil ferait voir les bandes qui en résulteraient. En d'autres termes, on n'est pas certain que l'appareil soit suffisamment réglé pour montrer les bandes d'interférence qui pourront se produire.

Supposons, en effet, que pour une certaine couleur les deux faisceaux produisent sur la fente du spectroscope dans le premier appareil une interférence complète. Il y aura en ce point une bande obscure; mais, comme la lumière ne peut pas s'anéantir, cette bande sera bordée à droite et à gauche de deux bandes brillantes. Si l'intervalle de ces franges, qu'il faudrait déterminer, était plus petit que la largeur de la fente du spectroscope, on n'en serait pas prévenu et le spectre n'offrirait en aucun cas des cannelures brillantes et obscures. Il n'est même pas impossible que le choix de la direction des fentes n'ait été mal fait, que les franges produites par la lumière qui provient de l'un des points de la source ne soient perpendiculaires à la fente du spectroscope, auquel cas le spectre ne pourra déceler aucune interférence.

J'exagère sans doute les objections, mais on ne saurait être trop prudent pour tirer une conclusion d'une expérience négative. Je crois, par exemple, que l'expérience de M. Hoek serait singulièrement améliorée si l'on produisait artificiellement une différence de marche entre les deux faisceaux, en établissant une lame mince sur le trajet de l'un d'eux. On obtiendrait ainsi dans le spectre des bandes d'interférence, et il resterait à constater si ces bandes se déplacent ou sont immobiles.

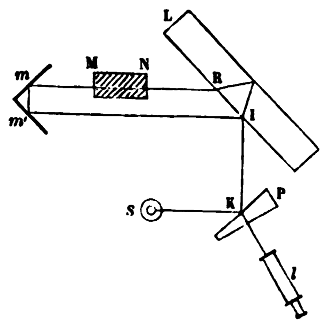
Quoi qu'il en soit, j'ai essayé de répéter cette expérience de M. Hoek sous une autre forme; j'y étais d'autant plus intéressé qu'à l'époque où j'ai fait cette tentative je croyais encore à la nécessité de modifier le terme principal U de la formule de Fresnel suivant le sens du mouvement; dans cette hypothèse, l'expérience de M. Hoek devait donner un résultat positif allant jusqu'à une frange entière avec les lames dont je me servais.

La disposition expérimentale que j'ai employée a été imaginée par M. Jamin (1). A l'aide d'une plaque de verre épaisse L (*fig.* 20), ar-

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXIII, p. 146.

gentée sur sa deuxième face, on partage un faisceau de lumière KI en deux autres Im' et Rm, dont l'un est réfléchi sur la première face et l'autre sur la seconde. Ces deux faisceaux, en se réfléchissant sur deux miroirs à angle droit m et m', échangent leurs routes, reviennent à la

Fig. 20.



plaque L et reprennent identiquement le chemin IK, si chacun d'eux éprouve au retour une réflexion différente de celle qu'il a subie à l'aller. Ces deux faisceaux ainsi superposés peuvent donner lieu à des phénomènes d'interférence.

Si les miroirs m et m' sont rigoureusement rectangulaires et si leur intersection est parallèle à la plaque L, la différence de marche est nulle pour les faisceaux de toutes directions, et l'on n'obtient pas de franges.

Si, les miroirs étant toujours rectangulaires, leur intersection fait un petit angle avec la plaque L, on apercevra, en examinant la lumière de retour, soit à l'œil nu accommodé pour la vision éloignée, soit avec une lunette pointée sur l'infini, un système de *franges rectilignes perpendiculaires à la projection de l'arête des deux miroirs sur le plan de la plaque* L. En particulier, si la plaque est verticale et les deux miroirs m et m' à peu près verticaux, les franges seront *horizontales*.

La figure indique suffisamment les autres parties de l'appareil : S est une source de lumière blanche, une lampe à gaz ou à pétrole; P est un prisme à angle très-aigu pour éliminer la lumière réfléchie sur une des faces; L est une des plaques épaisses de l'appareil interférentiel de M. Jamin; MN le milieu interposé sur le trajet de l'un des faisceaux.

Quand la lumière revient, elle traverse en partie le prisme P, et l'on observe les franges avec une lunette astronomique *l* à réticule. Comme la distance des franges est en raison inverse de l'inclinaison de l'arête des miroirs, on peut, par le moyen d'une vis de rappel, modifier le phénomène à volonté, et donner aux franges la largeur que permettent les imperfections des surfaces.

Voici quelques-unes des expériences :

28 juillet 1871, minuit. — 16 août 1871, $11^h 30^m$ matin.

La lame MN était formée de quatre glaces de Saint-Gobain collées ensemble depuis longtemps au baume de Canada, et dont l'épaisseur totale était de 32 millimètres.

L'appareil a été dirigé alternativement vers l'est et vers l'ouest sans donner lieu à aucun déplacement appréciable. On aurait aperçu facilement une différence de marche d'un dixième de longueur d'onde.

19 août 1871, 11 heures du matin.

On a pris cette fois pour milieu interposé un prisme de flint lourd dont les deux bases ont été travaillées avec soin. L'épaisseur ainsi traversée était $98^{mm},5$. Le phénomène d'interférence était très-pur et le résultat a été absolument négatif, c'est-à-dire qu'il n'y avait pas un déplacement d'un dixième de frange.

Il ne serait pas impossible de répéter l'expérience de M. Hoek avec la lumière d'une étoile, mais je crois que le résultat serait encore négatif. En effet, le retard de deux faisceaux, dont l'un a traversé le milieu, a pour expression

$$\frac{e}{V}(n-1),$$

l'indice n étant une fonction de la période apparente de vibration. On voit aisément que la période apparente de vibration serait exactement la même pour l'aller et pour le retour des rayons et que, par suite, la différence serait toujours nulle.

XIV. — *Retour sur la double réfraction rectiligne ou circulaire.*

J'ai montré dans la première partie de ce travail que le mouvement de la Terre n'a absolument aucune influence sur la double réfraction du spath d'Islande ni sur le pouvoir rotatoire du quartz, quand on opère, bien entendu, avec une source de lumière terrestre.

On peut conclure des observations que j'ai rapportées que le mouvement de la Terre ne modifie pas de un vingt-millième le pouvoir rotatoire du quartz, ni de un millionième la différence de marche qui s'établit entre les deux rayons ordinaire et extraordinaire du spath d'Islande. Il résulte de là quelques conséquences théoriques.

Supposons qu'une lame de spath parallèle à l'axe d'épaisseur e soit traversée par un faisceau de lumière marchant dans le sens du mouvement de la Terre, et désignons par n et n' les indices de réfraction ordinaire et extraordinaire.

Nous ne pouvons pas appliquer directement les raisonnements de Fresnel à la propagation des ondes, parce que le milieu n'est pas isotrope et qu'il est difficile de préciser alors ce qu'il faut entendre par entraînement de l'éther; mais nous pouvons admettre que la vitesse de l'onde ordinaire sera représentée par l'expression

$$U' = U + u\left(1 - \frac{\alpha}{n^2}\right),$$

α étant une quantité indéterminée dont il faudra chercher la valeur.

Le temps θ que cette onde mettra à traverser la lame sera

$$\theta = \frac{e}{U' - u} = \frac{e}{U - \frac{u\alpha}{n^2}} = \frac{e}{U}\left(1 + \frac{u}{U}\frac{\alpha}{n^2}\right) = \frac{e}{V}(n + a\alpha).$$

Si l'on représente de même par

$$U'' = U + u\left(1 - \frac{\alpha}{n'^2}\right)$$

la vitesse de propagation de l'onde extraordinaire, on obtiendra, pour le temps θ' que mettra cette onde à traverser le cristal,

$$\theta' = \frac{e}{V}(n' + a\alpha').$$

La différence de ces temps, c'est-à-dire le retard de l'onde ordinaire sur l'onde extraordinaire sera

$$\tau = \theta - \theta' = \frac{e}{V}(n - n') + \frac{ea}{V}(\alpha - \alpha').$$

Le retard des deux ondes à la surface de sortie n'est pas nul; comme elles se propagent dans l'air avec la vitesse $V - u = V(1 - a)$, la différence de marche absolue est donc

$$V(1-a)\tau = (1-a)\,[e(n-n') + ea(\alpha - \alpha')].$$

Cette différence produira, si les deux faisceaux sont ramenés à l'interférence, une frange d'ordre m donné par l'équation suivante, dans laquelle on a représenté par $\lambda(1-a)$ la longueur d'onde réelle, à cause du sens dans lequel marche la source :

$$m\lambda(1-a) = (1-a)[e(n-n') + ea(\alpha-\alpha')],$$

ou bien

$$m = (n-n')\frac{e}{\lambda} + \frac{e}{\lambda}a(\alpha-\alpha').$$

Si l'on répète l'expérience en faisant marcher la lumière incidente en sens contraire du mouvement de la Terre, l'ordre m' de la frange obtenue sera

$$m' = (n-n')\frac{e}{\lambda} - \frac{e}{\lambda}a(\alpha-\alpha'),$$

et, par suite, on devra observer un déplacement $m - m'$ donné par l'expression

$$m - m' = 2a\frac{e}{\lambda}(\alpha - \alpha').$$

Si l'on juge que l'expérience a démontré que ce déplacement est absolument nul, il faut en conclure $\alpha = \alpha'$.

On peut bien admettre aussi que le rayon ordinaire se comporte, pour toutes les expériences précédentes de réfraction simple, comme si le milieu était isotrope : il en résulterait alors $1 = \alpha = \alpha'$.

Cette conséquence permet de faire une remarque importante. L'excès de vitesse que le mouvement du milieu imprime au rayon ordinaire est

$$u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

l'excès de vitesse que reçoit une onde extraordinaire est

$$u\left(1-\frac{1}{n'^2}\right).$$

Ces deux accroissements n'étant pas les mêmes, et leur différence n'étant pas très-petite, il en résulte qu'on ne peut plus les expliquer par les idées de Fresnel. En effet, si la vitesse de propagation des ondes était augmentée par cette circonstance que le milieu réfringent transporte avec lui l'excès de l'éther qu'il renferme sur l'éther qui existerait dans le même espace vide, cette augmentation de vitesse serait la même pour les deux ondes ordinaire et extraordinaire, et l'on devrait avoir

$$\frac{\alpha}{n^2}=\frac{\alpha'}{n'^2}.$$

Mais alors, en dirigeant l'appareil alternativement dans le sens ou en sens contraire du mouvement de la Terre, le déplacement des franges ne serait plus nul; il aurait pour valeur

$$m-m'=2a\frac{e}{\lambda}\left(\alpha-\alpha\frac{n'^2}{n^2}\right)=2a\alpha\frac{e}{\lambda}\,\frac{n^2-n'^2}{n^2}=2a\alpha(n-n')\frac{e}{\lambda}\,\frac{n+n'}{n^2}.$$

Comme la différence de marche pour l'appareil en repos est $(n-n')\frac{e}{\lambda}$, la fraction dont cette différence serait modifiée est

$$2a\alpha\left(\frac{n+n'}{n^2}\right).$$

En remplaçant dans cette formule les indices du spath par leurs valeurs connues et le coefficient α par l'unité, la fraction devient

$$\frac{2}{10000}\,\frac{3,144}{2,548}=\frac{2,46}{10000}=\frac{1}{4000}\text{ environ.}$$

Une telle quantité n'aurait certainement pas échappé dans les expériences. On aurait donc dû observer un déplacement d'*une* frange pour une différence de marche de 4000 longueurs d'onde, ou bien de *vingt franges* pour une différence de marche de 80 000 longueurs d'onde. Dans ces conditions, le moindre changement de direction

que l'on donnerait à l'appareil se traduirait par un déplacement de franges, et il est certain que rien de pareil n'a lieu.

Il semble résulter de là que, pour calculer l'influence des milieux pondérables, il est nécessaire d'avoir recours à d'autres considérations que celle du transport partiel de l'éther, comme le faisait Fresnel. Je laisse ce soin aux mathématiciens.

Le pouvoir rotatoire du quartz conduirait exactement aux mêmes conséquences. En effet, la rotation que ce cristal imprime au plan de polarisation des rayons qui le traversent dans la direction de l'axe dépend, d'après l'interprétation de Fresnel, de la différence de marche qui s'établit entre deux rayons polarisés circulairement, issus du rayon incident polarisé et qui se propagent avec des vitesses différentes.

L'expérience ayant démontré que la rotation du plan de polarisation n'est nullement influencée par le mouvement de la Terre, il en résulte que les deux rayons circulaires n'éprouvent pas le même changement de vitesse par suite du mouvement du milieu, et que l'on doit appliquer à chacun d'eux la formule de Fresnel, dans laquelle on introduira l'indice de réfraction particulier à chaque rayon circulaire.

La conclusion générale de ce Mémoire serait donc (si l'on fait abstraction de l'expérience de M. Fizeau sur la rotation du plan de polarisation par des séries de piles de glace) que le mouvement de translation de la Terre n'a aucune influence appréciable sur les phénomènes d'optique produits avec une source terrestre ou avec la lumière solaire, que ces phénomènes ne nous donnent pas le moyen d'apprécier le mouvement *absolu* d'un corps et que les mouvements *relatifs* sont les seuls que nous puissions atteindre.

SUR LE

SPECTRE NORMAL DU SOLEIL,

PARTIE ULTRA-VIOLETTE,

PAR M. A. CORNU,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Tous les physiciens connaissent la belle description des raies sombres du spectre solaire de M. Angström et les planches remarquables qui résument ce travail; outre leurs qualités de précision et de netteté, ces belles planches ont un autre mérite, celui de conduire les physiciens et les astronomes à adopter l'échelle des longueurs d'onde, pour la définition des raies et des radiations, au lieu des échelles arbitraires introduites par les premiers spectroscopistes.

Le Mémoire de M. Angström ne s'étend qu'au spectre visible. Je me suis proposé de compléter ce travail par l'étude du spectre dans la partie ultra-violette, jusqu'à la limite à laquelle on parvient avec les instruments d'optique en usage dans les laboratoires, et de composer une planche faisant suite à celle de M. Angström, c'est-à-dire classant suivant l'échelle des longueurs d'onde les raies sombres du spectre ultra-violet.

J'ai eu pour me guider dans ce travail, entrepris d'ailleurs en vue de recherches de Physique solaire ([1]), outre les Mémoires de M. Ed. Becquerel, la thèse de M. Mascart. Ce travail, le plus complet jusqu'à ce jour, renferme une description détaillée du spectre ultra-violet, obtenu par la photographie; les raies sont classées d'après leurs déviations produites par le prisme employé et représentées par une planche qui résume toutes les mesures; mais cette planche, outre l'inconvénient de l'emploi d'une échelle arbitraire, a le défaut de rendre imparfaitement

([1]) *Voir* les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIII, p. 332; juillet 1871.

l'*effet* des groupes de raies, de sorte qu'il est très-difficile d'établir la concordance des raies avec les épreuves photographiques (1).

Dans le travail que je présente aujourd'hui (2), j'ai cherché, indépendamment de la classification plus rationnelle des raies, à représenter le plus fidèlement qu'il m'a été possible de le faire l'aspect général des groupes, afin de faciliter aux physiciens l'établissement de cette concordance, capitale dans les études spectroscopiques.

Je n'ai pas poussé l'étude du spectre ultra-violet aussi loin que M. Mascart, parce que j'ai tenu à conserver les appareils ordinaires des laboratoires, dont les objectifs en crown et flint-glass absorbent les radiations très-réfrangibles, mais qui sont, ainsi qu'on va le voir, d'un maniement plus facile que les appareils en quartz. Toutefois, j'ai pu constater que dans cette étude du spectre ultra-violet on pouvait, avec ces appareils, aller notablement plus loin qu'on ne le croyait généralement. En effet, l'absorption due aux objectifs n'empêche pas de photographier les raies ultra-violettes jusqu'à P et même jusqu'à Q (notations de M. Ed. Becquerel et de M. Mascart) dans un spectre de diffraction : avec un prisme de spath d'Islande, on atteint la raie P; avec un prisme de flint ordinaire, la raie O.

L'emploi des objectifs achromatiques des goniomètres ou des spectroscopes présente un avantage considérable sur celui des objectifs de quartz; la variation de foyer des divers rayons est très-petite, et le champ angulaire dans lequel la netteté reste suffisante est relativement très-grande.

Il en résulte que, dans des recherches courantes sur les radiations chimiques où l'on n'aurait pas besoin d'aller jusqu'à la limite des raies observables, on a tout avantage à employer les objectifs achromatiques ordinaires : ainsi, avec un bon goniomètre dont les lunettes ont 30 à

(1) Il ne faudrait pas croire que le *renversement*, c'est-à-dire l'apparence négative des clichés, soit gênant; après quelques minutes d'observation, on compare très-bien une épreuve négative à un dessin positif : on se guide sur la forme et l'intensité relative des groupes de lignes et non pas sur leur éclat absolu.

(2) La minute de la planche qui accompagne ce Mémoire a été présentée à l'Association francaise pour l'avancement des Sciences, en septembre 1872, au Congrès de Bordeaux (*voir* le volume des *Comptes rendus* de la session de Bordeaux, p. 300) : le retard dans la publication de ce Mémoire et surtout de la gravure de la planche provient de causes indépendantes de ma volonté.

40 centimètres de distance focale, un prisme de spath d'Islande bien travaillé, il suffit de trois clichés photographiques ayant chacun une étendue angulaire de 40 minutes pour obtenir toute la partic du spectre chimique comprenant les raies *h*, H, K, L, M, N, O.

La finesse des détails dépend entièrement de la perfection du prisme; avec un bon prisme elle atteint un degré étonnant : les clichés peuvent supporter un grossissement de 50 fois, c'est-à-dire 5 à 6 fois celui de l'oculaire de la lunette.

Au point de vue expérimental, j'ai adopté la marche indiquée par M. Mascart, à savoir l'emploi de la plaque photographique au foyer de la lunette d'un spectroscope formé par un seul prisme; toutefois, j'ai changé le dispositif : au lieu d'introduire une très-petite glace collodionnée jusque dans le plan du réticule, j'ai trouvé plus commode d'employer un porte-plaque extérieur qu'on introduit aussi à la place de l'oculaire. Cette disposition dispense de tailler des verres circulaires, dont la dimension est si petite que la manipulation photographique devient difficile; de plus, elle permet de placer la petite glace collodionnée sur un châssis glissant à coulisse et d'obtenir ainsi plusieurs épreuves sur la même glace. Il est vrai aussi qu'on n'utilise plus le réticule; mais, en général, on n'en a pas besoin, et si le besoin s'en fait sentir, on verra plus loin comment on obtient des repères équivalents.

J'ai exécuté trois séries de clichés photographiques de spectres produits :

1° Par un réseau de Nobert;

2° Avec un prisme de flint;

3° Avec un prisme de spath d'Islande (rayon ordinaire).

La série obtenue avec les réseaux a permis de déterminer directement la longueur d'onde de 36 raies principales; les deux autres ont fourni des spectres plus dispersés ou plus étendus, lesquels, par la finesse de leurs détails, ont servi à compléter les observations précédentes.

Voici le détail d'une opération :

I. *Manipulation photographique.* — Le procédé photographique a été simplifié autant que possible : le collodion employé était celui du commerce; il faut le commander un peu plus épais ou attendre qu'il le devienne; on perd, il est vrai, en sensibilité, mais on gagne en

vigueur pour les clichés. Le bain d'argent contient $7\frac{1}{2}$ pour 100 de nitrate d'argent; le révélateur est formé de 1000 grammes d'eau, 30 centimètres cubes d'alcool, 30 centimètres cubes d'acide acétique cristallisable, et 60 centimètres cubes d'une solution saturée de sulfate de fer. On renforce avec quelques gouttes d'un vieux bain à 5 pour 100 et avec le révélateur; on fixe au cyanure, avec lequel on risque peu de tacher les épreuves, quand on opère à la hâte.

Les clichés sont séchés et vernis (vernis Sœhnée).

II. *Mise au point.* — La difficulté principale qu'on rencontre dans ces expériences, c'est la mise au point. Voici le procédé très-simple que j'ai suivi. Le tirage de la lunette étant gradué en millimètres, on construit la courbe empirique dont les ordonnées représentent la graduation du tirage de la lunette pour chaque raie principale du spectre visible, mise au point sur le réticule, et dont les abscisses sont la déviation minima de la raie. La lunette étant achromatique pour les rayons visibles, cette courbe empirique a la forme d'une parabole dont le sommet correspondrait au milieu du spectre : les rayons dont la distance focale est minima sont les rayons verts voisins de *b*. Les rayons chimiques présentent dès lors des distances focales croissant avec leur réfrangibilité, mais très-lentement au début; grâce à leur visibilité, on peut donc les suivre optiquement jusqu'à la raie H et prévoir par *extrapolation graphique* les tirages qu'il faudra donner à la lunette pour amener dans le plan du réticule le foyer d'une radiation plus réfrangible, correspondant à une déviation donnée. Comme la plaque sensible n'est pas placée dans le plan du réticule, mais en arrière, de toute l'épaisseur du porte-plaque, on diminue le tirage, c'est-à-dire les ordonnées de la courbe de cette quantité, et la courbe empirique peut servir à la mise au point photographique.

Pour faire cette correction d'une manière simple et rigoureuse, on enlève l'oculaire et on le remplace par le porte-plaque muni d'une glace sur la surface de laquelle sont tracés quelques traits au diamant, sur la face même où devrait être la couche sensible. A l'aide d'une loupe très-forte, on vise par transparence un groupe de raies très-fines, par exemple le groupe G, et l'on règle le tirage de manière à amener les traits exactement dans le plan focal de ces rayons. On recommence

la même opération en rétablissant l'oculaire et en visant sur le fil du réticule : la différence des deux lectures du tirage dans ces deux cas donne exactement l'épaisseur optique du porte-plaque, c'est-à-dire la correction à faire subir aux ordonnées de la courbe empirique. On vérifie photographiquement cette opération en remplaçant la plaque striée par une glace collodionnée et l'on rectifie, s'il y a lieu, en faisant des essais à $\frac{2}{10}$ de millimètre en avant ou en arrière du tirage calculé.

La courbe une fois construite pour la partie visible du spectre chimique permet d'obtenir sans tâtonnements les clichés de cette partie du spectre. Pour les rayons invisibles ultra-violets, on prolonge *à vue* l'élément de courbe graphique jusqu'à l'abscisse choisie, c'est-à-dire jusqu'à la déviation des rayons qui doivent occuper le milieu du champ, et on lit l'ordonnée ou graduation correspondant au tirage. On fait une épreuve et l'on examine si la netteté la plus grande est bien au milieu du champ; s'il en est ainsi, le réglage est bon, sinon on détermine à l'inspection de l'épreuve la déviation de la région la plus nette et l'on rectifie le prolongement de la courbe des tirages : une seconde épreuve donne alors à coup sûr un résultat complétement satisfaisant.

On procède ainsi de proche en proche, en s'arrangeant de manière que deux clichés successifs présentent une partie commune, afin qu'on puisse les raccorder avec certitude.

III. *Signes de repère sur les clichés.* — Ayant été conduit, par le dispositif adopté, à rejeter l'emploi du réticule, j'ai dû chercher des moyens de tracer des repères sur les épreuves ; voici les deux qui m'ont paru à la fois les plus commodes et les plus précis :

1° On fixe la lunette en un point du cercle dont on note l'azimut A tel que la raie principale à observer soit sensiblement dans le milieu du champ; puis, quand l'épreuve est terminée, on ramène la lunette dans la déviation du collimateur, de manière à recevoir l'image directe de la fente. Pour éviter de troubler le milieu du champ par la formation de l'image de cette fente et pour se ménager une échelle de proportion angulaire, on cale la lunette dans deux positions symétriques, distantes de 20 minutes du rayon central, dont l'azimut approché est A_0, et dans chacune des deux positions on impressionne la glace sensible. Le cliché présente alors la série des raies et de chaque côté deux lignes

noires, images directes de la fente, qui sont les deux repères; il est facile de voir que la raie idéale qui se trouverait au milieu exact des deux repères correspondrait rigoureusement à la déviation mesurée par

$$A - \left(\frac{A_0 + 20' + A_0 - 20'}{2}\right) = A - A_0.$$

La distance des deux repères donne en même temps l'échelle de proportion du cliché, ou valeur linéaire correspondant à l'intervalle angulaire de 40 minutes.

Cette méthode s'applique parfaitement aux épreuves des spectres obtenus avec des réseaux ou avec des prismes, mais à la condition que ces pièces soient bien construites; si les réseaux offrent des erreurs systématiques dans leurs traits, si les faces du prisme ne sont pas optiquement planes, le foyer des rayons diffractés ou réfractés ne se forme plus dans le même plan que celui des rayons directs, et alors les repères n'ont plus la finesse qui fait leur précision : toutefois, un dépointement dans le foyer de 2 à 3 millimètres fournit encore des résultats satisfaisants. Si la différence de foyer dépasse cette limite, il faut employer la méthode suivante, plus précise encore, mais d'un usage un peu moins commode.

2° On utilise les images déviées à droite et celles déviées à gauche; on fait sur chaque cliché une double épreuve : à cet effet, on couvre la moitié supérieure de la fente et l'on fait une épreuve en photographiant les rayons déviés d'un côté en plaçant la lunette à l'azimut A_1; on répète la même opération en plaçant la lunette à l'azimut A_{-1} symétrique par rapport au rayon central, de manière à photographier les mêmes rayons, mais déviés de l'autre côté, et en découvrant l'autre moitié de la fente. On obtient ainsi un cliché où le même spectre se trouve disposé suivant deux positions inverses.

Le milieu des deux images de chaque raie est le même pour toutes : ce milieu correspond à la déviation $\frac{A_1 - A_{-1}}{2}$. Ce mode opératoire a le double avantage d'offrir une seconde épreuve qui sert de contrôle, et de présenter une vérification pour les deux mesures micrométriques d'une même raie.

L'échelle de proportion ne se trouve pas sur l'image comme dans la méthode précédente; il faut faire une seconde épreuve avec une déviation différente pour l'obtenir.

Dans le cas où l'on veut employer le minimum de déviation du réseau ou du prisme, il est nécessaire de disposer sur la plate-forme centrale ou sur l'alidade mobile un petit cercle auxiliaire qui permet de déplacer la pièce de la moitié de l'angle dont tourne la lunette.

IV. *Examen et amplification des clichés.* — Les épreuves développées et fixées sont ensuite examinées avec un microscope grossissant de 25 à 100 fois, dont la plate-forme porte un chariot à vis micrométrique permettant de relever la position relative des raies. Dans d'autres cas, on adapte au microscope une chambre claire dite *d'Oberhauser*, projetant sur une feuille de papier blanc l'image du cliché : en suivant avec la pointe d'un crayon les traits de l'épreuve, on peut obtenir une image amplifiée des raies spectrales et les relever graphiquement avec un compas; je dirai plus loin dans quel cas je me suis servi de l'une ou de l'autre de ces deux méthodes d'examen et d'amplification.

Enfin, comme auxiliaires fort commodes, j'ai exécuté des épreuves amplifiées de ces petits clichés avec un grossissement variant de 12 à 25 diamètres. A cet effet le microscope était renversé horizontalement, l'oculaire enlevé et le cliché fixé au porte-objet était éclairé par la concentration de rayons solaires; l'image du cliché venait se peindre dans l'intérieur d'une chambre noire à portraits dont l'objectif était enlevé : on recevait cette image, rendue moins intense et plus monochromatique par l'interposition d'un verre bleu en avant de la lentille de concentration, sur une glace collodionnée.

De cette manière, on se procure des clichés positifs, visibles sans loupe, où l'on peut étudier et dessiner sans fatigue l'*effet* des groupes de raies des épreuves; des épreuves sur papier, obtenues avec ces clichés, sont très-utiles dans les carnets d'observation lors des mesures micrométriques, pour définir les raies qu'on relève et éviter les confusions.

Relevé des observations.

Le but à atteindre était la détermination des longueurs d'onde de toutes les raies ultra-violettes observables, et l'opération fondamentale a consisté dans le relevé micrométrique des clichés obtenus avec les réseaux. Il eût été très-désirable de relever toutes les raies sur ces clichés; mais le faible pouvoir optique et les défauts inévitables des réseaux

introduisent une certaine confusion dans les images des raies. Cette imperfection des images n'empêche pas la précision du pointé des raies bien isolées, malgré le léger estompement des bords, mais elle efface les détails des groupes de raies un peu fines; en un mot, le spectre des réseaux est notablement inférieur à celui des prismes; de plus, la dispersion des réseaux étant proportionnelle à la longueur d'onde est pour les radiations très-réfrangibles beaucoup moins avantageuse que celle des prismes, qui est sensiblement proportionnelle à l'inverse du carré de la longueur d'onde.

Il a donc fallu se contenter de mesurer les longueurs d'onde des raies principales, sauf à demander aux clichés des spectres prismatiques les détails intermédiaires et même le contrôle de la simplicité des raies fondamentales.

Le réseau de Nobert dont je me suis servi appartient au Cabinet de l'École Polytechnique; il est formé de 1801 traits tracés au diamant; la distance du premier au dernier égale $6^{mm},762$, d'après quatre mesures concordantes effectuées avec la vis d'une machine à diviser de Bianchi et rapportées à un mètre de Lenoir. L'incertitude causée par les difficultés de subdivision d'une grande unité, de comparaison aux types, des effets de la dilation, etc., fait que je ne pourrais pas répondre de 2 à 3 unités sur le quatrième chiffre; on en déduit, pour l'intervalle de deux traits,

$$a = 0^{mm},003762.$$

Comme je n'avais pas en vue une détermination absolue des longueurs d'onde, mais plutôt la continuation du travail d'Angström, je n'ai considéré cette mesure que comme une vérification des opérations ultérieures, et j'ai déduit la constante de mon réseau de la comparaison de déviations de six raies principales avec les longueurs d'onde données par le savant suédois.

Le plan du réseau se règle normalement aux rayons incidents, en se servant de la réflexion normale à l'axe optique de la lunette pointée exactement sur le collimateur; à cet effet, on emploie un oculaire nadiral, semblable à ceux qu'emploient les astronomes pour viser sur le bain de mercure, ou simplement une lame de glace inclinée à 45 degrés, qu'on place devant le réticule après avoir ôté l'oculaire : on peut alors, en projetant de la lumière suivant l'axe, mettre en coïncidence le réti-

cule avec son image réfléchie sur la face du réseau qui porte les traits; cette coïncidence s'observe avec une grande précision à l'aide d'une loupe qui permet d'examiner le réticule à travers la glace sans tain.

Je mesurais la double déviation δ du spectre du second ordre, qui était très-brillant et très-pur, laquelle satisfait à la formule

$$\frac{a}{2}\sin\delta = \lambda.$$

Voici le résumé des observations :

	2δ	λ (Angström).	$\log\left(\frac{\lambda}{\sin\delta} = \frac{a}{2}\right)$.
Raie C................	40°.50'.48"	656,20	3,27428
Raie D (plus réfrangible).	36.30. 3	588,89	3,27425
Raie b_1 (isolée)........	31.59.54	519,30	3,27426
Raie F................	29.57.30	486,06	3,27430
Raie du fer...........	26.57.12	438,26	3,27426
Raie du fer...........	25.58.24	422,63	3,27431
		Moyenne.......	3,27428

$$\log\frac{a}{2} = 3,27428.$$

$$\frac{a}{2} = 1880,5 \text{ millionièmes de millimètre.}$$

La mesure directe m'avait donné 0,001881.

La moyenne du logarithme de $\frac{a}{2}$ est le facteur qui a servi ultérieurement à tous les calculs pour déduire les longueurs d'onde des déviations observées optiquement ou chimiquement.

Il reste à dire quelques mots du mode de calcul employé pour la réduction des clichés. Chacun de ces clichés porte un numéro particulier, qui correspond sur le carnet d'expériences aux déviations des deux repères tracés photographiquement, suivant la méthode décrite plus haut.

Voici, par exemple, le calcul de la longueur d'onde de la raie G ($\lambda = 430,72$ Angström), d'après le cliché X_0.

	Azimut des repères.	Azimut de la déviation.
Cliché X_0........	$\begin{cases} 90° + 20' \\ 90° - 20' \end{cases}$	75° 45';

d'où l'on conclut que les repères correspondent aux déviations $\left\{\begin{matrix} 13^\circ 35' \\ 12^\circ 55' \end{matrix}\right.$ (la confusion entre les deux n'est pas possible, car on sait, d'après la position du cliché sur le goniomètre le sens des déviations croissantes). Les longueurs d'onde qui correspondent à ces repères sont 441,66 et 420,36, en appliquant la formule $\frac{a}{2}\sin\delta = \lambda$.

Le cliché a été placé sur le chariot du microscope et avec la vis micrométrique on a amené successivement les raies les plus importantes ainsi que les deux repères : la mesure a été répétée en tournant la vis en sens inverse. La moyenne des deux pointés a donné :

Premier repère....	37,622			$\lambda = 420,36$
		Diff.	4,921	
Raie G..........	42,543			x
		Diff.	5,106	
Deuxième repère..	47,649			441,66
	Diff. des repères.		10,027	Diff. 21,30

Le cliché correspondant à 13 degrés de déviation moyenne et ayant une étendue de 40 minutes, on peut admettre que dans ce petit intervalle les longueurs d'onde varient proportionnellement aux distances des repères : d'où l'on conclut la proportion qui donne la longueur d'onde par la raie G,

$$\frac{x - 420,36}{21,30} = \frac{4,921}{10,027}, \quad x = 430,81.$$

Il y a toutefois une petite correction à faire si l'on veut rapporter ces nombres à ceux qu'on obtient optiquement; en effet, dans ce mode opératoire, on n'observe la déviation que d'un seul côté et d'une manière dissymétrique : on peut donc craindre une petite erreur constante provenant à la fois de cette cause et de la différence des modes d'observation. C'est ce que j'ai aperçu en déterminant successivement la longueur d'onde des mêmes raies par le procédé optique et le procédé photographique : la région violette autour de la raie G se prête très-bien à ces mesures. La correction est d'ailleurs très-faible et sensiblement constante; sa valeur moyenne est de $-0,10$ ou $\frac{1}{4000}$ en valeur absolue. Les valeurs corrigées sont données dans le tableau suivant, sous le nom de *valeurs définitives*.

Tableau des déterminations optiques et photographiques des longueurs d'onde du spectre solaire.

VISION DIRECTE.	D'APRÈS MASCART.	RELEVÉ DES CLICHÉS $X_0, X_1, X_2, X_3, X'_4, X'_5$.				D'APRÈS ANGSTRÖM.			VALEURS DÉFINITIVES.
C 656,20						C 656,20			
D_1 588,92						D_1 588,89			
b_1 518,32						b_1 518,30			
F 486,05		X_0				F 486,06			
» 438,26		438,37				438,26			
G ″		430,81	X_1			G 430,72			
» 422,60		422,73	422,71			» 422,63			
			414,38	X_2					
			″	411,91					411,81
			h 410,04	410,20		*h* 410,12			*h* 410,10
				407,21		407,10			407,11
				406,39		406,29			406,29
				404,61		404,50			404,51
				403,09		402,93			402,99
				400,54		400,46			400,44
				398,71		398,80			398,61
	H 396,72		H_1 ou	H 396,86	X_3	H_1 396,82			H 396,76
	″			395,31	395,33	395,15			395,20
	″		H_2 ou	K 393,39	″	H_2 393,30			K 393,29
	″			392,31	392,35				392,21
	″			390,58	″				390,48
	″			389,57	389,60				389,47
	″				387,87				387,74
	″				386,06				389,93
	″				b'_1 383,88 (*)				383,75
	L 381,90				L 382,09				L 381,96
	″				380,77				380,64
	″				378,66		X'_4		378,53
	″				376,46		376,47		376,33
	″				374,65		374,64		374,52
	M 372,88				M 372,81		372,82		M 372,68
	″						370,67		370,54
	″						368,84		368,71
	″						366,75		369,62
	″						364,83		364,70
	″						363,21		363,08
	″						361,93		361,80
	″						360,95	X'_5	360,8[illegible]
	N 358,02						N 358,18	358,15	N 358,05
	″							355,73	355,63
	″							352,67	352,57
	″							349,78	349,68
	O 344,01							O 344,07	O 343,97
	P 336,02							P 337,08	P 336,98

(*) Raie du magnésium correspondant à b_1 du spectre visible.

Ce tableau renferme les résultats déduits directement de chacun des clichés X_0, X_1, X_2, X_3, X'_4, X'_5 (1). Les clichés successifs offrant toujours deux à deux une partie commune, le *raccordement* s'effectue sans aucune confusion : on remarquera à ce propos la concordance remarquable des déterminations communes.

On a rapporté la série des raies observées optiquement : deux d'entre elles sont communes au cliché X_0 et donnent la valeur approchée de la correction; cette correction est donnée d'une manière plus complète par la comparaison des nombres d'Angström (qui s'accordent complétement avec les résultats optiques, d'après ce qui a été dit plus haut) avec ceux déduits des clichés jusqu'à la raie K (ou H_2 de la planche d'Angström).

Telles sont les observations fondamentales qui m'ont permis de déterminer les longueurs d'onde de toutes les autres raies, au nombre d'environ 650.

On remarquera pour la partie ultra-violette l'accord qui existe entre mes déterminations et celles que M. Mascart a faites des raies H, K, L, M, N, O, P. J'ai adopté d'ailleurs les mêmes notations pour les raies.

Tracé de la Planche.

Pour réunir sur un dessin toutes les raies observées, j'ai commencé par tracer à la machine à diviser une échelle millimétrique sur une feuille de carton de Bristol; un premier canevas de raies a été tracé avec les 36 raies du tableau précédent, dont les longueurs d'onde ont été déterminées directement. L'échelle adoptée est la même que celle d'Angström, à savoir 1 centimètre pour un millionième de millimètre; les raies intermédiaires ont été obtenues par interpolation, d'après les clichés des spectres prismatiques, dont la finesse est supérieure à celle des spectres de réseaux.

J'avais commencé à relever au micromètre les raies des clichés de ces spectres fournis par les prismes, mais j'y ai bien vite renoncé pour

(1) Ces clichés ont été obtenus à Paris le 5 mai 1871, à l'exception du dernier, qui l'a été le 7 : il est bon de fixer la date de ces épreuves, depuis que les physiciens et les astronomes soupçonnent quelque variation lente dans la constitution solaire.

deux motifs : le premier, c'est que le nombre des raies est si grand qu'on ne sait plus sur le carnet d'expérience comment les désigner sans les confondre et sans faire d'erreurs de pointés; le second, c'est que tout ce travail ne servirait qu'à donner une exactitude illusoire, puisqu'on peut à peine compter sur une approximation de 0,05 dans la mesure absolue des longueurs d'onde, c'est-à-dire un demi-millimètre sur le tracé graphique.

J'ai pensé qu'il valait bien mieux porter tout le soin vers la reproduction de l'*aspect* ou *effet* de chaque groupe de raies plutôt que sur la position absolue de chacune d'elles : en un mot qu'une erreur dans les intervalles relatifs d'un groupe était beaucoup plus préjudiciable qu'un déplacement égal du groupe tout entier. J'ai donc choisi un moyen de relevé qui permît d'avoir toujours une vue d'ensemble sur les groupes : c'est ce que donne l'emploi de la chambre claire décrite plus haut.

Les clichés obtenus avec un prisme de flint assez dispersif ont été amplifiés environ 75 fois et les dessins raccordés très-exactement sur la même épure, dont le développement atteignait 3 mètres depuis la raie *h* jusqu'à O. Sur cet énorme spectre (¹), où les raies les plus fines et les plus serrées ont été reproduites, j'ai commencé par un premier travail de mise à l'*effet* des groupes, soit en forçant la couleur de l'encre, soit en employant le lavis pour représenter les raies estompées ou les régions à fond plus sombre : pour me guider, les positifs amplifiés étaient d'un grand secours.

A l'aide de ce premier dessin, sur lequel les raies étaient rangées suivant la dispersion prismatique, j'ai pu, avec un simple compas de proportion, exécuter une véritable interpolation graphique entre les 36 raies fondamentales. L'échelle de proportion variait progressivement d'un intervalle à l'autre; mais la distance des raies fondamentales avait été choisie de manière que dans aucun cas l'erreur due à l'emploi du compas ne s'élevât à $\frac{2}{10}$ de millimètre. Une courbe empirique avait d'ailleurs été construite pour bien se rendre compte de cette variation et une échelle particulière tracée sur le compas de proportion facilitait beaucoup cette opération graphique.

La partie la plus réfrangible du spectre entre N et O a été relevée

(¹) La distance des deux raies H (nommées H et K) était d'environ 12 centimètres.

surtout à l'aide de clichés obtenus avec le réseau et le prisme de spath d'Islande; l'absorption du prisme de flint était trop considérable pour que les détails fussent suffisamment nets ([1]).

En somme, la Planche qui résume ce travail peut être considérée comme formant suite aux Planches du Mémoire d'Angström : j'ai adopté les mêmes conventions et déduit de ses nombres la constante de mon réseau. La finesse des détails me paraît être au moins du même ordre dans l'ensemble du spectre : elle est même beaucoup plus grande pour les environs des raies *h*, H; mais cela n'a rien qui doive étonner, car l'œil arrive à la limite de sensibilité dans cette région, tandis que le collodion iodobromé est, au contraire, extrêmement sensible pour ces radiations.

Enfin, comme erreur probable dans la position des raies par rapport aux repères, je ne crois pas que le dessin atteigne 0,03, c'est-à-dire un tiers de millimètre ; en valeur absolue, ces repères ou raies fondamentales ne doivent pas s'écarter de 0,10 de leur vraie valeur.

([1]) L'aspect des groupes a été copié sur des clichés obtenus avec un prisme de flint, en mai et juin 1871 pour la plus grande partie du spectre : la partie la plus réfrangible a été revue sur des clichés obtenus avec un prisme de spath d'Islande (rayon ordinaire), en mai 1872. Je crois utile de fixer ces dates, afin de permettre plus tard de reconnaître les *changements d'aspect* des groupes, suivant les phases de l'activité solaire. Ces changements sont déjà visibles lorsque l'on compare les Planches de Kirchhoff avec celles d'Angström et avec l'apparence actuelle du spectre solaire. Comme exemple de ces changements, je citerai l'existence de deux *raies ou plages brillantes,* figurées sur la Planche par deux petits cercles ($\lambda = 388,15$, $\lambda' = 388,55$) très-visibles sur les clichés de 1871, qui sont beaucoup moins apparentes sur les clichés de 1872.

SUR

LA TEMPÉRATURE DU SOLEIL.

(Extrait d'une Lettre de M. J.-L. Soret à M. H. Sainte-Claire Deville.)

« Genève, 14 octobre 1874.

» J'ai lu avec un très-grand intérêt les Notes sur la température du Soleil, que vous avez communiquées à l'Académie au nom de M. Violle, savant distingué, qui, à côté de ses travaux originaux, s'est acquis un titre à la reconnaissance de tous les physiciens par la part importante qu'il a prise à la publication des *Œuvres* de Verdet. Vous vous rappelez peut-être que je m'occupe depuis plusieurs années de recherches présentant, quant aux moyens d'observation, une grande analogie avec celles de M. Violle. J'en ai déjà fait connaître quelques résultats [1] et j'espère pouvoir en faire prochainement l'objet d'une publication plus complète, que j'ai dû ajourner parce qu'il me restait à déterminer une correction assez difficile à obtenir.

» Ces mesures de l'intensité calorifique de la radiation solaire ont, je le crois, un assez grand intérêt à divers points de vue; mais je doute que, dans l'état actuel de la science, elles puissent conduire à la détermination de la température du Soleil.

» Le principe de l'appareil, ou actinomètre, successivement employé pour ces observations, d'abord par Pouillet, qui a bientôt adopté une méthode différente, puis par M. Waterston, le R. P. Secchi, M. Ericson, M. Violle et moi-même, consiste à placer un thermomètre à boule noircie dans une enceinte dont la température θ est connue. Un trou percé dans cette enceinte laisse pénétrer un faisceau de rayons

[1] Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1867, t. LXV, p. 526, et 1868, t. LXVI, p. 810. — *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, 1re session, 1872, p. 282.

solaires tombant sur le réservoir du thermomètre qui prend une température t.

» Pour pouvoir déduire de cette observation la température du Soleil, il faudrait avant tout connaître la loi du rayonnement de la chaleur à des températures très-élevées. On a tantôt admis la loi de Newton, tantôt celle de Dulong et Petit; or ni l'une ni l'autre ne sont exactes pour les hautes températures : c'est ce qui me paraît résulter très-nettement d'une série d'expériences que j'ai fait connaître il y a deux ans [1]. Permettez-moi de vous en rappeler les résultats en renvoyant, pour les détails, aux Notes que j'ai publiées.

» Avec l'actinomètre que j'ai employé, la radiation solaire à Genève produit un excès de température $t - \theta$ qui dépasse 14°,5. Si, au lieu d'exposer l'actinomètre au Soleil, je dispose un disque de zircone ou de magnésie, chauffé à la lampe oxyhydrique (gaz d'éclairage et oxygène), en le plaçant à une distance telle que son diamètre apparent, relativement au réservoir du thermomètre, soit le même que celui du Soleil, j'obtiens un excès de température $t - \theta$ de 0°,5 seulement. La température du disque est au moins égale, et dépasse probablement celle de la fusion du platine : on peut donc l'évaluer à 1900 ou 2000 degrés.

» Le R. P. Secchi a communiqué, il y a quelques mois, à l'Académie une expérience analogue faite avec la lumière électrique, dont il évalue la température à 3000 degrés, et il a obtenu une intensité de radiation 44 à 36 fois plus petite que celle du Soleil. Je suis tout disposé à admettre l'exactitude de cette expérience; mais on pourrait peut-être objecter qu'il y a assez d'incertitude sur la température de la lampe électrique et qu'il n'est pas certain que toute l'étendue du charbon, visible pour le thermomètre, soit également échauffée. Je m'arrête donc seulement à mon expérience, contre laquelle les mêmes objections ne peuvent être élevées avec la même force.

» Si la loi de Newton était exacte, pour calculer la température T du disque chauffé à la lampe oxyhydrique, on aurait la formule

$$t - \theta = \alpha T,$$

---

(1) *Archives des Sciences physiques et naturelles* (Bibliothèque universelle), 1872, t. XLIV, p. 220, et t. XLV, p. 252.

α étant égal à $\frac{1}{183960}$. Or

$$t-\theta=0°,5, \quad \text{d'où} \quad T=91980°,$$

résultat absolument inadmissible, car il est certain que la température du disque est voisine de 2000 degrés et ne dépasse pas, en tout cas, 2800 degrés : la loi de Newton ne se vérifie donc pas.

» Le R. P. Secchi, en discutant, soit quelques-unes de mes expériences, soit la sienne, conclut à une température du Soleil de plus de 100 000 degrés. Son raisonnement se résume à dire que, puisque l'intensité de la radiation solaire est 44 fois plus forte que celle de la lumière électrique, la température du Soleil doit aussi être 44 fois plus élevée que celle de la lampe. Cette conclusion ne me paraît point admissible, car elle revient à supposer que la loi de Newton est exacte à partir de 2000 ou 3000 degrés, tandis que l'expérience prouve manifestement qu'elle est inexacte entre zéro et 2000 degrés.

» Passons à la loi de Dulong et Petit. M. Vicaire a déduit de cette loi, pour le cas qui nous occupe, la formule

$$a^t-a^\theta=\alpha a^T,$$

où $\alpha=\frac{1}{183960}$ comme précédemment, et $a=1,0077$. On tire de là

$$T=\frac{\log(a^t-a^\theta)+\log\frac{1}{\alpha}}{\log a}.$$

Or si l'on applique cette formule à mon expérience où $t=15°,45$ et $\theta=14°,95$, on trouve $T=870°$, chiffre évidemment trop bas, comme l'a déjà fait remarquer le R. P. Secchi. Et si l'on fait le calcul inverse en cherchant la valeur de t pour une température $T=2000°$, on trouve que l'excès $t-\theta$, au lieu d'être de $\frac{1}{2}$ degré, conformément à l'observation, devrait être de plusieurs *centaines* de degrés. Donc la loi de Dulong et Petit, si exacte pour les températures de zéro à 300 degrés, cesse de l'être lorsqu'on dépasse ces limites.

» Si, faisant un raisonnement analogue à celui que nous venons de critiquer à l'instant, on conservait la formule

$$a^t-a^\theta=\alpha a^T,$$

en modifiant seulement la valeur du coefficient a que l'on déduirait de mon expérience, on trouverait pour cette valeur 1,0028 au lieu de 1,0077. Appliquant ensuite la formule à l'excès $t - \theta$, que j'ai obtenu au sommet du Mont Blanc, on arriverait au chiffre de 3330 degrés pour la température du Soleil. Mais ce raisonnement n'est pas légitime : la loi de Dulong et Petit étant inexacte de 300 à 2000 degrés, on ne peut admettre qu'elle soit applicable au-dessus de 2000 degrés. Et puisque le coefficient a, qui devrait être constant d'après la loi, diminue de 1,0077 à 1,0028, quand on passe de 300 à 2000 degrés, il est probable qu'il prendrait une valeur encore plus petite à des températures dépassant 2000 degrés, ce qui conduirait, pour la température du Soleil, à un chiffre supérieur à 3330 degrés.

» Mais ce n'est là qu'une probabilité, nullement une certitude, et je me borne, en résumé, à dire que je ne pense pas que l'on puisse actuellement arriver par cette voie à mesurer avec quelque approximation la température du Soleil. Mon impression est qu'elle est notablement supérieure aux températures les plus élevées que l'on atteigne par des combustions et que l'on évalue à 3000 degrés environ; mais les dépasse-t-elle de quelques centaines de degrés, ou de quelques milliers de degrés? C'est là une question à laquelle je ne voudrais pas me hasarder de répondre.

A ce propos, permettez-moi de vous parler encore de quelques essais, dont une partie ont été faits dans votre laboratoire de l'École Normale, et qui, tout imparfaits qu'ils soient, montrent une fois de plus la grande intensité comparative de la radiation solaire.

» Si l'on regarde une source de lumière, un bec à gaz, par exemple, à travers une ou plusieurs lames de verre bleu de cobalt, on observe que, pour une épaisseur convenable de verre, la flamme paraît d'une teinte pourpre, résultant de ce que le cobalt laisse passer les rayons rouges extrêmes ainsi que les rayons bleus et violets en interceptant les radiations de réfrangibilité moyenne. Si l'on observe, au travers de la même épaisseur de verre, une source de lumière à température plus élevée et par conséquent plus riche en rayons très-réfrangibles, elle ne paraît plus pourpre, mais bleue; il faut augmenter l'épaisseur de verre de cobalt pour obtenir de nouveau cette teinte pourpre; en effet, on ne modifie pas beaucoup par là la proportion de rayons rouges transmis, tan-

dis que les rayons bleus sont sensiblement affaiblis. Il y a donc une relation entre l'épaisseur du verre de cobalt qui produit la teinte pourpre et la température de la source, du moins s'il s'agit d'une lumière blanche émanant d'un corps solide ou liquide incandescent. Avec quelques perfectionnements, on pourrait baser sur ce principe la construction d'une sorte de pyromètre qui serait peut-être utile dans certains cas.

» Voici quelques résultats que j'ai obtenus en opérant avec des lames découpées dans un même verre de cobalt. A la température de la fusion du platine, deux de ces lames superposées suffisaient pour donner sensiblement la teinte pourpre; c'est ce que j'ai pu observer à loisir au Conservatoire des Arts et Métiers, lors de la fusion du lingot destiné à la fabrication des mètres internationaux, opération à laquelle j'ai eu la bonne fortune d'être présent. Peu après, grâce à votre obligeance, j'ai pu assister dans votre laboratoire à l'expérience de la fusion de l'iridium : au moment du maximum de température, cette source de lumière observée avec les deux mêmes lames de verre paraissait complétement bleue; mais avec trois lames on avait une teinte pourpre d'une nuance assez exactement semblable à celle que donne un bec à gaz vu au travers de deux lames. Or, si l'on observe le Soleil lorsqu'il est haut sur l'horizon et par un temps pur, on n'obtient la teinte pourpre ni avec trois, ni avec quatre, ni même avec six lames superposées. Il faut une grande épaisseur de verre de cobalt pour arriver à cette nuance sur les bords du Soleil, et une partie de l'effet doit, sans aucun doute, être attribuée aux défauts d'homogénéité des verres que j'ai employés. La lumière de la Lune donne le même résultat, ce qui montre que l'intensité n'a pas d'influence..... »

FIN DU TOME TROISIÈME.

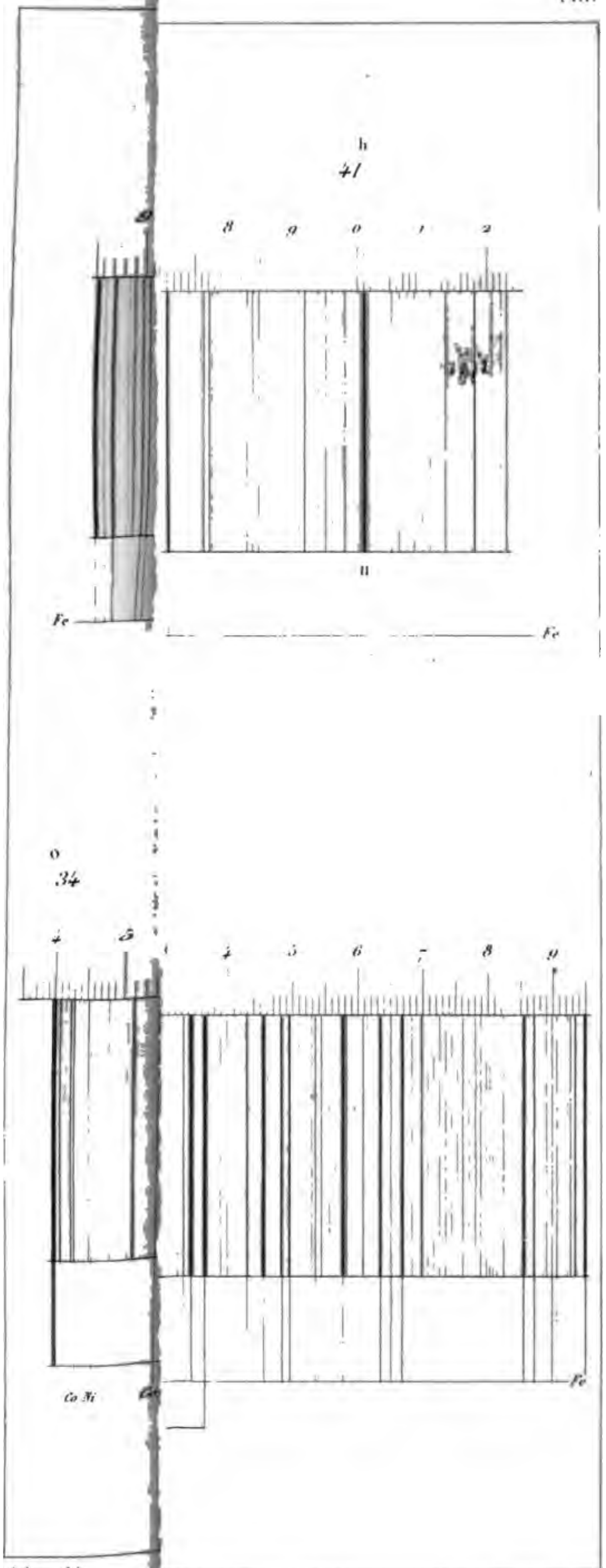
TABLE DES MATIÈRES

DU TOME TROISIÈME.

ERRATA.

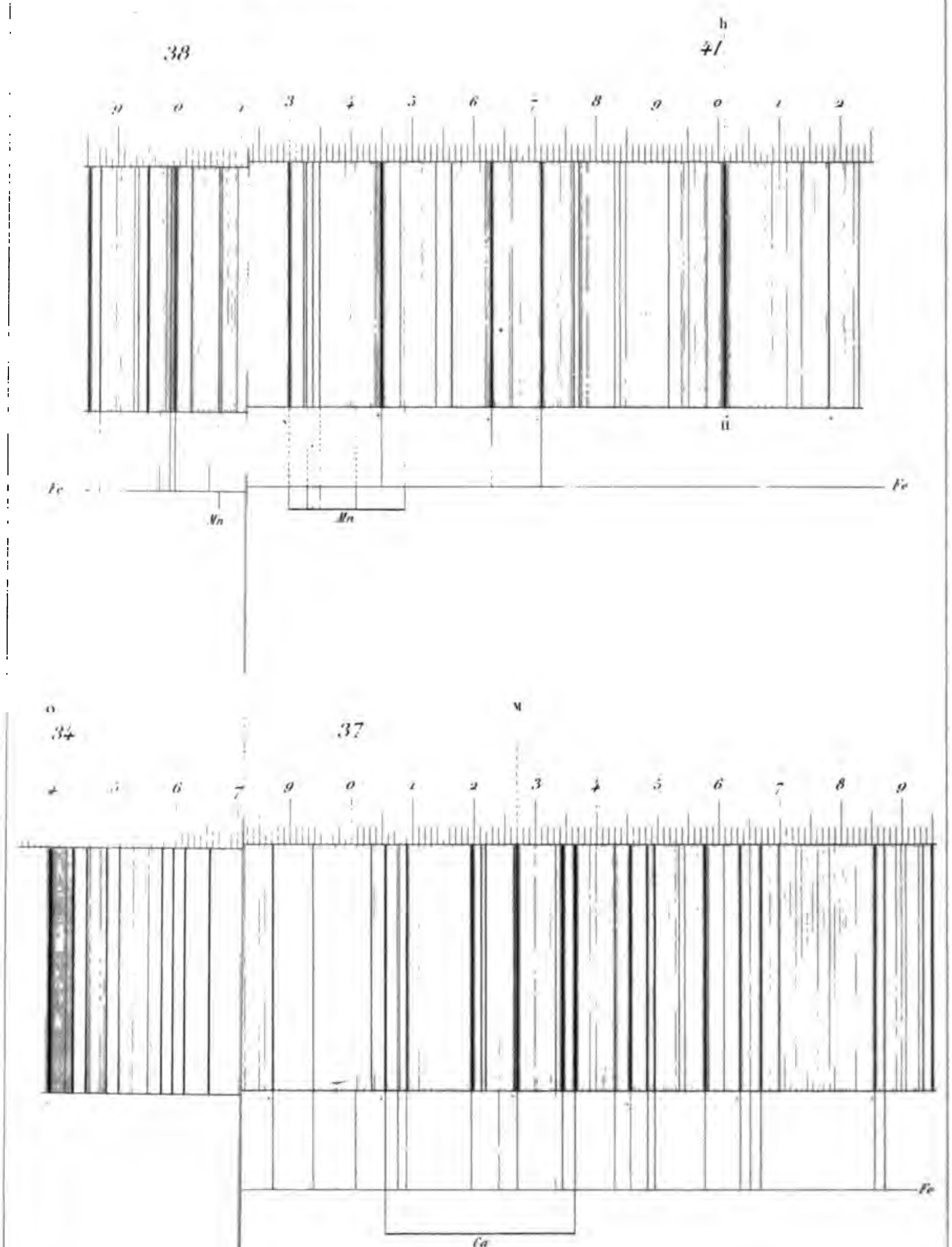
	Au lieu de	*Lisez*
Page 173, dernière ligne......	valeur, l'expression.....	valeur de l'expression.....
Page 205, dernière ligne......	$\sum_1^l i(\sqrt{in})$	$\sum_{i=1}^l (\sqrt{in})$
Page 186..................	$2f_1^{\lambda_1-2} + 2f_1^{\lambda_1-3} + \ldots$	$2f_1^{\lambda_1-2} + 2f_1^{\lambda_1-4} + \ldots$
	$2^\mu - \frac{n}{e^2}$	$2^\mu \cdot \frac{n}{e^2}$

1111 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.



A. Cornu del.   Legras et Dulos, sc.

A. Cornu



ep